

Geschichtliches.

Marcolongo, Roberto: *La matematica di quaranta secoli fa.* Scientia (Milano) **51**, 21—34 (1932).

Bericht über neuere Arbeiten über vorgriechische Mathematik.

O. Neugebauer (Göttingen).

Enriques, F., et G. Diaz de Santillana: *Platone e la teoria della scienza.* Scientia (Milano) **51**, 5—20 (1932).

Nach einer allgemeinen, nichts Neues bietenden Skizze der platonischen Philosophie wird das Verhältnis Platos zu der exakten Wissenschaft erörtert. Die Beurteilung Platos erfolgt von Demokrit aus, d. h. von wesentlich empiristischem Gesichtspunkt. Insbesondere heißt es, der Begriff des Naturgesetzes sei, obwohl durch Demokrit vorbereitet, von Plato nicht erfaßt worden. Plato sei kein „Wissenschaftler“ gewesen, er habe an Stelle von Arbeitshypothesen Mythen von analogisch-symbolischer Funktion verwandt — „ein Mittleres zwischen Wissen und Unwissenheit ... eine kühne Brücke, geworfen durch unser sublunares Elend in der Richtung auf das Reich des Intelligiblen“. — Die Elementenlehre des „Timäus“ wird etwas ausführlicher behandelt. Der Zusammenbau der regulären Polyeder aus Dreiecksflächen wird für physikalisch unmöglich erklärt (der Interpretationsversuch von Eva Sachs wird verworfen). Es handle sich auch da nur um eine „analogische Explikation“ ohne streng wissenschaftlichen Wert. Doch sei immerhin das „Prinzip der Einfachheit der Natur“ vorausgeahnt. Des weiteren wird das Ideal einer logisch-axiomatischen Grundlegung der Mathematik Plato, wenn auch nicht ausschließlich, zugeschrieben. Mit einigen Bemerkungen über den pädagogischen Wert der Mathematik nach Plato schließt der Aufsatz.

Oskar Becker (Bonn).

Ver Eecke, Paul: *Note sur la théorie du plan incliné chez les mathématiciens grecs.* Mathesis **45**, 352—355 (1931).

Übersetzung des einen Abschnittes Pappus Coll. VIII, prop. 9 (ed. Hultsch, S. 1055 bis 1059, bereits ins Lateinische übersetzt). Mehrere sinnstörende Druckfehler.

O. Neugebauer (Göttingen).

Rome, A.: *Sur une loi empirique des éclipses de lune.* Ann. Soc. sci. Bruxelles A **51**, 94—103 (1931).

Es werden Intervallfolgen von 6 oder 5 Monaten angegeben, die man leicht aus empirischen Finsternislisten ableiten kann und aus denen sich ungezwungen die babylonischen und Hipparchischen Zyklen ergeben.

O. Neugebauer (Göttingen).

Rome, A.: *Sur la date d'Artémidore.* Ann. Soc. sci. Bruxelles A **51**, 104—112 (1931).

Dieser Kommentator des Ptolemäus wird mit gewisser Wahrscheinlichkeit auf den Anfang des 3. Jahrhunderts datiert.

O. Neugebauer (Göttingen).

Sengupta, P. C.: *Brahmagupta on interpolation.* Bull. Calcutta Math. Soc. **23**, 125—128 (1931).

In dem Aufsätze werden die beiden Stellen aus Brahmaguptas Khandakhya-dyaka (665 A.D.) und die eine Stelle aus Bhâskaras Grahagaṇita (Spashtâdhikâra) (1150 A.D.) beigebracht, in denen quadratisch interpoliert wird, wenn die zu interpolierende Funktion für drei Werte des Arguments als bekannt angesehen wird. Dabei gibt Bhâskara nur die Interpolation bei äquidistanter Teilung des Arguments, Brahmagupta auch die für nichtäquidistante Teilung. — Das Resultat ist z. B. für den ersteren Fall in folgender Formel enthalten, die vom Verf. nur in einem Zahlenbeispiele gegeben wird:

$$y(x_2 + t) = y_2 + \frac{t}{h} \left[\frac{S}{2} - \frac{t}{h} \cdot \frac{D}{2} \right],$$

wenn y_1, y_2, y_3 die drei äquidistanten Ordinaten, h die Länge des Teilungsintervalls $x_2 - x_1 = x_3 - x_2$ und S die Summe, D die Differenz der ersten Differenzen $\Delta y_1 = y_2 - y_1$ und $\Delta y_2 = y_3 - y_2$ bezeichnen. — Unnötig erscheint die Bezugnahme auf die moderne Form der Interpolationsformel, wodurch das Wesentliche in dem indischen Gedankengang verschoben wird. Im übrigen ist ziemlich sicher, daß Brahmagupta nicht als erster diese quadratische Interpolation benutzt hat.

C. Müller (Hannover).

Bodewig, E.: Die Stellung des heiligen Thomas von Aquino zur Mathematik. Arch. Gesch. Philos. 11, 1—34 (1931).

Crommelin, C. A.: Das isochrone konische Pendel von Christian Huygens. Physica (Eindhoven) 11, 359—364 (1931) [Holländisch].

Rössler, G.: Ein unbekanntes Instrument von Jobst Burgi im Hessischen Landesmuseum zu Kassel. Z. Instrumentenkde 52, 31—38 (1932).

Während die älteren (z. B. Dürers) Methoden zur Zeichnung perspektiver Bilder auf trivialen punktwisen Konstruktionen beruhen, hat Burgi 1604 einen wirklichen Zeichenapparat konstruiert, der für nicht zu große Gesichtswinkel genähert perspektive Bilder liefert.

Ein Visierlineal ist 1. um seinen Mittelpunkt in einer Vertikalebene drehbar, 2. diese Ebene um die Vertikale durch den Mittelpunkt des Lineals. Bewegung 1 steuert den Zeichenstift in der x -Richtung des horizontalen Zeichenbrettes, Bewegung 2 verschiebt das Zeichenbrett in der y -Richtung unter dem Zeichenstift.

O. Neugebauer (Göttingen).

Agostini, Amedeo: Due lettere inedite di Girolamo Saccheri. Mem. Accad. Ital. Roma, Cl. Sci. fis. ecc. 2, Mat.: Nr 2, 1—20 (1931).

The author remarks that the history of mathematics in Italy during the second half of the 17th and the first part of the 18th century has not had sufficient attention. For that reason he publishes two letters of Girolamo Saccheri (1667—1733), one to Guido Grandi on the sextic

$$a^3x^2 = (a^2 - y^2)^3,$$

written in 1701, another to Tomaso Ceva answering criticism of Grandi on Saccheri's book "Neo-statica". This letter was written in 1709. Added is the answer of Grandi to Ceva, also in 1709. The letters were found in the large correspondence of Grandi which is preserved at the University Library of Pisa, and which contains two more letters of Saccheri.

D. J. Struik (Cambridge).

Hofmann, Jos. E., H. Wieleitner und D. Mahnke: Die Differenzenrechnung bei Leibniz. Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss., Phys.-math. Kl. H. 26, 562—600 (1931).

Obgleich die Differenzenrechnung bei Leibniz eine der Wurzeln seiner Differentialrechnung bildet, ist sie weder in Cantors noch in Zeuthens Darstellung zu ihrem Recht gekommen; und auch I. M. Child in seinen "Early mathematical manuscripts of Leibniz" (Chicago und London 1920) gibt nicht so viele mathematische Erläuterungen, als zum bequemen Verständnis dieser Entwicklung notwendig sind. Diese Kommentare zu geben, ist das Verdienst der Verff., deren einer, Heinrich Wieleitner, hier zum letztenmal aus der reichen Fülle seiner historischen Kenntnisse zu uns Mathematikern gesprochen hat — ein harter Tod hat ihn zwei Wochen nach dem Erscheinen dieser Abhandlung hinweggerafft. — Die Hauptquelle ist der zu Leibnizs Lebzeiten nicht veröffentlichte Aufsatz: "Historia et origo calculi differentialis" (Ges. math. Abh. ed. Gerhardt 5, 392—410). Schon früh hatte Leibniz die Reihe

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$$

und ähnliche Reihen summiert, im Anschluß an Spekulationen über die Binomialkoeffizienten (Pascalsches Dreieck) und das „harmonische Dreieck“, das wesentlich aus den reziproken Werten der Binomialkoeffizienten besteht. Vergebens rennt er gegen das Problem der Summation der reziproken Quadratzahlen an, dessen Lösung Euler vorbehalten bleiben soll. In den entscheidenden Pariser Jahren 1673—1676,

in denen die Differentialrechnung entsteht, entwickelt er auch zwei Theoreme zur Differenzenrechnung, die die Verff. modern folgendermaßen ausdrücken (Leibniz hat damals noch von Indizes keinen Gebrauch gemacht und expliziert noch stark an Zahlenbeispielen): Seien die Differenzen der Folge u_1, u_2, \dots bezeichnet mit $\Delta u_i = u_i - u_{i-1}$, $\Delta^{(2)} u_i = \Delta u_i - \Delta u_{i-1}$ usw., so ist

$$1. \quad u_0 - u_\infty = \Delta^{(k)} u_0 + \binom{k}{1} \Delta^{(k)} u_1 + \binom{k+1}{2} \Delta^{(k)} u_2 + \dots,$$

$$2. \quad u_0 - u_n = n \Delta u_0 - \binom{n}{2} \Delta^{(2)} u_0 + \binom{n}{3} \Delta^{(3)} u_0 \mp \dots + (-1)^{n-1} \Delta^{(n)} u_0.$$

Als Johann Bernoulli 1694 diejenige Reihe, die wir die Maclaurinsche zu nennen pflegen, Leibniz brieflich mitteilt, antwortet dieser sofort, daß er sie aus seinen alten Pariser Überlegungen (nämlich aus 2.) ableiten könne. Insoweit ist also auch Leibniz an der Geschichte des Taylorschen Satzes beteiligt. — Die Konvergenz von 1. wird von Leibniz nicht erörtert; wenn — bemerken die Verff. — Leibniz dem Gebrauch der Zeit entsprechend mit seinen Buchstaben nur positive Größen gemeint hat, so wäre die Folge total-monoton und, wie sie näher ausführen, der Grenzübergang von Leibniz faktisch zu rechtfertigen. Um so lehrreicher ist es, aus den Zusätzen, die Mahnke aus unveröffentlichten Leibniz-Manuskripten der Arbeit anfügt, zu ersehen, daß Leibniz, und zwar schon (oder soll man sagen: noch) in der Pariser Zeit mit der Idee der Konvergenz und ihrer Handhabung wohlvertraut war.

O. Toeplitz (Bonn).

Loria, Gino: L'ininterrotta continuità del pensiero matematico italiano. Period. Mat., IV. s. 12, 1—16 (1932).

Algebra und Zahlentheorie.

Kurosch, Alexander: Zur Zerlegung unendlicher Gruppen. Math. Annalen 106, 107—113 (1932).

Es wird für nachher des näheren zu kennzeichnende unendliche Gruppen das Analogon zum Remakschen Satz bewiesen: Wenn zwei Zerlegungen der Gruppe \mathfrak{G} in direkte Produkte gegeben sind, so sind die Zerlegungen bis auf einen zentralen Isomorphismus identisch. Jeder direkte Faktor kann gegen einen zentralisomorphen der andren Zerlegung ausgewechselt werden. — Dieser Satz war bisher bekannt für Gruppen mit Doppelkettensatz, insbesondere endliche Gruppen. Der Verf. beweist ihn nun 1. für Gruppen mit Untergruppenkettensatz, d. h. Gruppen \mathfrak{G} , die keine unendliche Folge von Untergruppen $\mathfrak{G} \supset \mathfrak{G}_1 \supset \mathfrak{G}_2 \supset \dots$ enthalten, so daß \mathfrak{G}_{n+1} echte invariante Untergruppe von \mathfrak{G}_n ist; 2. für Gruppen mit unzerlegbarem Zentrum; 3. für freie Abelsche Gruppen, in denen für jedes Element a und jede ganze Zahl m $x^m = a$ eindeutig lösbar ist. — Die Methode ist beinahe die gleiche wie bei O. Schmidt.

Pietrkowski (Göttingen).

Haar, Alfréd: Zur Theorie der Gruppencharaktere. Mat. fiz. Lap. 38, 132—145 (1931) [Ungarisch].

Die Arbeit enthält eine elementare Begründung der Frobenius'schen Gruppencharaktere. Als Ausgangspunkt dient die bekannte reguläre Darstellung einer endlichen Gruppe; die einfachsten Sätze über die Klassen von konjugierten Elementen einer Gruppe liefern alsdann die Tatsache, daß die Summe derjenigen Matrizen, welche bei der regulären Darstellung der Elemente einer Klasse zugeordnet sind (sog. Klassenmatrizen), untereinander vertauschbare Normalmatrizen sind. Die simultane Transformation dieser Matrizen auf die Diagonalform liefert dann unmittelbar die Gruppencharaktere und man erhält ohne Mühe die Hauptergebnisse der Frobeniusschen Theorie über Anzahl, Orthogonalität und Vollständigkeit der verschiedenen Charaktere.

Autoreferat.

Sz. Nagy, Julius v.: Über die Lage der Nullstellen des Derivierten eines Polynoms. Mat. és fiz. Lap. 38, 41—59 u. dtsh. Zusammenfassung 59—60 (1931) [Ungarisch].

Bezeichnet Π das kleinste konvexe Polygon, das sämtliche Wurzeln einer algebraischen Gleichung $f(x) = 0$ enthält, so liegen nach einem bekannten Satze von Gauss auch sämtliche Nullstellen der Derivierten $f'(x)$ innerhalb Π . Der Verf. gibt Verschärfungen dieses Satzes, indem aus Π gewisse nullstellenfreie Gebiete für $f'(x)$ ausgeschlossen werden. Schließlich werden für Gleichungen mit lauter reellen Koeffizienten einige einfachere Sätze hergeleitet. *Otto Szász* (Frankfurt a. Main).

Beatty, S.: The derivatives of an algebraic function. Trans. Roy. Soc. Canada III Math. Sci., III. s. 25, 79—82 (1931).

Es sei u eine algebraische Funktion von z ; unter einschränkenden Voraussetzungen wird eine Darstellung der Ableitung u' als Funktion des Körpers $K(u, z)$ gegeben.

Ulrich (Marburg, Lahn).

Deuring, Max: Zur Theorie der Idealklassen in algebraischen Funktionenkörpern. Math. Annalen 106, 103—106 (1932).

Es sei k ein endlicher, separabler Körper algebraischer Funktionen in einer Unbestimmten z mit beliebigem Koeffizientenkörper Σ , also k eine endliche, separable Erweiterung des Körpers $\Sigma(z)$, die außer den Elementen von Σ keine von Σ algebraisch abhängigen Elemente enthält. Die Ideale des Unterrings \mathfrak{o} aller ganzen algebraischen Funktionen von z bilden dann bekanntlich eine Abelsche Gruppe \mathfrak{G} ; die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}$ von \mathfrak{G} nach der Untergruppe der Hauptideale ist die Idealklassengruppe von \mathfrak{o} . Für diese Idealklassen wird mit Hilfe bekannter, beim Beweis des Riemann-Rochschen Satzes benutzter Tatsachen das folgende Analogon zu einem Minkowskischen Satz in der Theorie der algebraischen Zahlen gewonnen: In jeder Idealklasse \mathfrak{A} von \mathfrak{o} gibt es ein ganzes Ideal \mathfrak{a} , dessen Norm einen die halbe Verzweigungszahl von k bezüglich $\Sigma(z)$ nicht übersteigenden Grad hat.

F. K. Schmidt (Erlangen).

Brauer, R., H. Hasse und E. Noether: Beweis eines Hauptsatzes in der Theorie der Algebren. J. f. Math. 167, 399—404 (1932).

The authors have answered an important outstanding question by proving that every normal division algebra over an algebraic field is a cyclic (Dickson) algebra. Hasse has applied this theorem (1) to show that the exponent of a normal simple algebra over an algebraic field is equal to its index, (2) to obtain extensions of theorems on class fields to general relative Galois fields, and (3) to prove that the absolutely irreducible representations of a finite group are all possible in cyclotomic fields.

MacDuffee (Columbus).

Albert, A. Adrian: On the construction of cyclic algebras with a given exponent. Amer. J. Math. 54, 1—13 (1932).

Über einem Körper F der Charakteristik Null werden zyklische Algebren $A = F(\gamma, Z, \theta)$ der Ordnung n^2 (vom Grade n) betrachtet; die kleinste natürliche Zahl σ , für die das direkte Produkt A^σ voller Matrizenring wird, heißt ihr Exponent. H. Hasse hat in einer in Kürze erscheinenden Arbeit für solche Algebren über einem algebraischen Zahlkörper Ω als Grundbereich gezeigt, daß der Exponent σ die kleinste natürliche Zahl ist, für die γ^σ Norm eines Elementes aus Z ist, und weiterhin, daß A dann und nur dann Schiefkörper, wenn $\gamma, \gamma^2, \dots, \gamma^{n-1}$ sämtlich nicht Normen von Elementen aus Z sind. Albert bewies, daß die Untersuchung zyklischer Algebren beliebigen Grades n auf die von Primzahlpotenzgrad p^t zurückgeführt werden kann, und zeigt für sie in Ergänzung der Hasseschen Resultate hier das folgende: 1. Der Exponent σ einer zyklischen Algebra $A = F(\gamma, Z, \theta)$ vom Primzahlpotenzgrad p^t ist eine Potenz p^s mit $s \leq t$, und zwar ist s die kleinste Zahl, für die γ^{p^s} Norm eines Elementes aus Z ist. 2. Sei $Z = Z_t$ ein zyklischer Körper der Ordnung p^t über F ; $Z = Z_t, Z_{t-1}, \dots, Z_1, \dots, Z_0 = F$ sei die Reihe der ineinandergeschachtelten zyklischen Unterkörper der Ordnung p^i über F ; für die Elemente f_i von Z_i sei wie üblich die Norm $N_i(f_i)$ bez. F definiert. Es gilt: Dann und nur dann ist für ein Element γ aus F die Potenz $\gamma^{p^s} = N_t(f_t) = N(f)$ für

passendes $f = f_t$ aus Z , wenn $\gamma = N_{t-e}(f_{t-e})$ für geeignetes f_{t-e} aus Z_{t-e} . 3. Ist γ eine Norm N_{t-e} , aber niemals eine Norm N_{t-e+1} , so ist die Potenz p^e der Exponent der zyklischen Algebra $A = F(\gamma, Z, \theta)$. Insbesondere also gilt: 4. Die zyklische Algebra A hat den Exponenten p^t , wenn γ niemals Norm N_1 eines Elementes aus Z_1 ist. Weiter besteht 5. Die zyklischen Algebren vom Grad und Exponenten p^t sind Schiefkörper über F . In Verbindung mit einem Hasseschen Resultat ergibt sich hieraus schließlich 6. Eine zyklische Algebra $A = \Omega(\gamma, Z, \theta)$ über dem endlichen algebraischen Zahlkörper Ω ist dann und nur dann Schiefkörper, wenn γ nie Norm $N_1(f_1)$ eines Elementes f_1 des zyklischen Unterkörpers Z_1 von Z der Ordnung p über Ω ist. — Hiermit ist eine Möglichkeit zur Aufstellung aller zyklischen normalen Divisionsalgebren von Primzahlpotenzgrad über algebraischen Zahlkörpern Ω und damit zur Konstruktion der zyklischen normalen Divisionsalgebren über Ω überhaupt gezeigt. (Vgl. dies. Zbl. 3, 199 [Hasse].) Grell (Jena).

Rees, Mina S.: Division algebras associated with an equation whose group has four generators. Amer. J. Math. 54, 51–65 (1932).

In der Hoffnung, neue Typen zu finden, hat man namentlich in der amerikanischen Literatur versucht, schrittweise auf immer kompliziertere Weise Divisionsalgebren (Schiefkörper) zu definieren. Hierüber wird eine Literaturübersicht gegeben. An die früheren Untersuchungen anknüpfend, wird dieser Weg einen Schritt weitergeführt. Zugrunde gelegt wird eine im Zahlkörper F Galoissche Gleichung (Normalgleichung), deren Gruppe vier Erzeugende besitzt, worunter eine auflösbare Gruppe von bestimmtem Typ verstanden ist. Für die aus Gleichung und Gruppe in bekannter Weise erzeugte Algebra werden die 20 Assoziativitätsbedingungen aufgestellt. Zuletzt werden die Untersuchungen auf das Beispiel einer Gruppe der Ordnung 32 angewandt.

Brandt (Halle).

Burnett, J. C.: To border a square of the 5th order. Consecutive numbers. Math. Gaz. 16, 11–13 (1932).

Veen, S. C. van: Eine Eigenschaft der Zahl 3. Nieuw Arch. Wiskde 17, 119 (1932).

Die Zahl 3 ist primitive Wurzel aller Primzahlen der Form $2^{2^k} + 1$. Autoreferat.

Breusch, Robert: Zur Verallgemeinerung des Bertrand'schen Postulates, daß zwischen x und $2x$ stets Primzahlen liegen. Math. Z. 34, 505–526 (1932).

Verf. beweist im ersten Teil dieser Arbeit: Für $x \geq 48$ liegt zwischen x und $9/8 \cdot x$ stets mindestens eine Primzahl. Für $x \geq 4 \cdot 10^6$ wird dies mit den bekannten funktionentheoretischen Methoden bewiesen, indem Verf. mit $\int_{s^4}^x \frac{-\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds$ arbeitet und die Summe $\sum_q \frac{x^q}{q^4}$ (q durchläuft die nichttrivialen Wurzeln der ζ -Funktion) abschätzt,

wobei er sich auf numerische Resultate von Backlund stützt. Für $48 \leq x < 4 \cdot 10^6$ wird der Satz an Hand der Primzahltafeln verifiziert. — Mit entsprechenden Hilfsmitteln beweist Verf. im zweiten Teil: Gegeben sei eine teilerfremde Restklasse mod 3 oder mod 4. Dann liegt für $x \geq 7$ stets zwischen x und $2x$ mindestens eine Primzahl dieser Restklasse.

Hans Heilbronn (Göttingen).

Haussner, Robert: Über die Verteilung von Lücken- und Primzahlen. J. f. Math. 167, 424–426 (1932).

Als Lückenzahlen r -ter Stufe bezeichnet man nach Stäckel diejenigen natürlichen Zahlen, die zu den r ersten Primzahlen $p_1 = 2, p_2 = 3, \dots, p_r$ teilerfremd sind. Verf. stellt als Vermutung folgenden Satz auf: „Zwischen zwei aufeinanderfolgenden ganzzahligen Vielfachen der Primzahl p_r liegt stets mindestens eine Lückenzahl r -ter Stufe.“ Eine unmittelbare Folge dieses Satzes ist der folgende weitere Satz: „Zwischen je zwei aufeinanderfolgenden ganzzahligen Vielfachen einer Primzahl p_r , die beide kleiner als p_{r+1}^2 sind, liegt mindestens eine Primzahl.“ [Die Unrichtigkeit dieser Vermutung wurde indessen nachgewiesen, zuerst von Herrn A. Brauer, Berlin. (Die Schriftleitung.)] Bessel-Hagen (Bonn).

Westzynthius, Erik: Über die Verteilung der Zahlen, die zu den n ersten Primzahlen teilerfremd sind. *Commentationes phys.-math. Soc. Sci. fenn.* 5, Nr 25, 1–37 (1931).

Verf. beweist: Es sei p_n die n -te Primzahl, dann gibt es für $\varepsilon > 0$ und $n \geq n_0(\varepsilon)$ stets

$$(2 - \varepsilon) \frac{e^0 \log \log p_n}{\log \log \log p_n} \cdot p_n$$

konsekutive Zahlen, deren jede durch mindestens eine der Primzahlen p_1, \dots, p_n teilbar ist, woraus sofort

$$\overline{\lim}_{n=\infty} \frac{(p_{n+1} - p_n) \cdot \log \log \log \log p_n}{\log p_n \cdot \log \log \log p_n} \geq 2e^0$$

folgt (vgl. dies. Zbl. 3, 4). Bisher war nicht einmal

$$\overline{\lim}_{n=\infty} \frac{p_{n+1} - p_n}{\log n} = \infty$$

bekannt. Der ausführlich dargestellte Beweis ist rein elementar und benutzt außer dem Primzahlsatz keinerlei tiefe Hilfsmittel. — Ferner werden Ergänzungen und Verallgemeinerungen des obigen Satzes bewiesen. *Hans Heilbronn* (Göttingen).

Mahler, Kurt: Über das Maß der Menge aller S -Zahlen. *Math. Annalen* 106, 131 bis 139 (1932).

Im J. f. reine u. angew. Math. 166, 118 (vgl. dies. Zbl. 3, 151) gibt Verf. eine Einteilung aller transzendenten Zahlen in S -, T - und U -Zahlen. Die Zahl x ist S -Zahl, wenn für jeden Ausdruck

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m \quad (a_0, \dots, a_m \text{ ganz, } a = \max(|a_0|, |a_1|, \dots, |a_m|) \geq 1)$$

gilt

$$|f(x)| \geq \Gamma(m) \cdot a^{-\gamma m} \quad (\gamma > 0, \text{ nur von } x, \Gamma(m) > 0 \text{ nur von } x \text{ und } m \text{ abhängig}).$$

Verf. zeigt: Das Linienmaß der Menge aller Punkte, die keine S -Zahlen sind (sogar die keine S -Zahlen sind mit $\gamma \leq 4$), auf der reellen Achse ist gleich Null und: das Flächenmaß der Menge aller Punkte der komplexen Zahlenebene, die keine S -Zahlen sind, ist gleich Null. — Zuerst wird eine positive untere Grenze hergeleitet für den Ausdruck

$$|f(z)| + |f'(z)| \quad (m \geq 2; |z| \leq 3a; f(z) \text{ besitzt nur einfache Nullstellen}).$$

Hieraus wird für das Maß aller z (L-Maß und Fl-Maß) mit

$$f(z) \leq \mu a^{-4m} \quad (\mu > 0 \text{ ist eine beliebige Konstante})$$

eine obere Schranke hergeleitet. Die Behauptungen folgen dann leicht. *J. F. Koksma*.

Titchmarsh, E. C.: On van der Corput's method and the Zeta function of Riemann. *II. Quart. J. Math., Oxford ser. 2*, 313–320 (1931).

Durch Fortentwicklung seiner Methode (I s. dies. Zbl. 2, 329) verschärft Titchmarsh meine Abschätzung $\zeta(\frac{1}{2} + ti) = O\left(t^{\frac{163}{988}}\right)$ zu

$$\zeta(\frac{1}{2} + ti) = O\left(t^{\frac{27}{164}}\right).$$

Der Beweis ist so einfach, wie man es sich nur wünschen kann. *A. Walfisz* (Radość).

Kalmár, László: Über das Problem der „Factorisatio numerorum“. *Mat. fiz. Lap.* 38, 1–15 (1931) [Ungarisch].

Es wird der asymptotische Verlauf der zahlentheoretischen Funktion $f(n)$ untersucht, welche als die Anzahl der Darstellungen von n in der Form

$$n = n_1 n_2 \dots n_k \quad (1)$$

definiert wird, wobei $k = 0, 1, 2, \dots$, ferner n_1, n_2, \dots, n_k beliebige ganze Zahlen > 1 sind. Dabei bedeutet das Produkt (1) im Falle $k = 0$ Eins; ferner sind zwei Darstellungen (1) auch dann als verschieden zu betrachten, wenn sie sich bloß in der Reihenfolge der Faktoren unterscheiden. Die zahlentheoretische Funktion $f(n)$ ist ein multiplikativ-

zahlentheoretisches Analogon der Anzahl der unbeschränkten Partitionen von n . — Es wird für $f(n)$ die asymptotische Formel

$$f(1) + f(2) + \dots + f(n) \sim \frac{n^2}{-e\zeta'(\varrho)}$$

hergeleitet, wobei ϱ durch $\varrho > 1$, $\zeta(\varrho) = 2$ definiert ist.

Autoreferat.

Chowla, S.: Two problems in the theory of lattice points. *J. Indian Math. Soc.* **19**, 97–108 (1931).

1. Es sei $Q_k(u) = \sum_{j=1}^6 u_j^2 + \sum_{j=7}^k u_j^4$ ($k \geq 6$; leere Summe bedeutet Null); $P_k(x)$ sei der geläufige Gitterrest für den Bereich $Q_k(u) \leq x$. Behauptungen (für stetig wachsendes x):

$$P_k(x) = O\left(x^{\frac{k+2}{4}}\right) \quad (\text{I}) \quad P_k(x) = \Omega\left(x^{\frac{k+2}{4}}\right) \quad (\text{II})$$

(II) ist sehr leicht zu beweisen. (I) ist wahr für $k = 6$ (sechsdimensionale Kugel); denn bekanntlich ist $P_6(x) = O(x^2)$. Daraus folgt (I) für größere k , indem man nach den u_j mit $j > 6$ summiert. — 2. Es sei $P(x)$ der Gitterrest für den Bereich $u_1^4 + u_2^4 \leq x$. Behauptung:

$$\sum_{m=1}^n \sum_{r=1}^m P(r) = o(n^2).$$

Hilfsmittel zum Beweise: Die Eulersche Summenformel und eine asymptotische Formel für

$$\sum_{n=1}^x R\left(\sqrt[n]{n}\right) \quad (x > 0, x \text{ ganz}, R(\alpha) = \alpha - [\alpha]).$$

Jarník (Praha).

Corput, J. G. van der, und J. Popken: Über den kleinsten Wert einiger quadratischer Formen. III. *Proc. Roy. Acad. Amsterdam* **34**, 951–964 (1931).

Ähnliche scharfe Abschätzungen für einige quadratische Formen wie in der 1. und 2. Mitteilung (vgl. dies. Zbl. **2**, 129, 329); es wird z. B. bewiesen: Sind die Zahlen $2y_r + \alpha$ ($r = 1, 2, \dots, m$) alle positiv bzw. alle negativ, so ist (für reelle u_r)

$$\sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \frac{u_r u_s}{y_r + y_s + \alpha} \geq \text{bzw.} \leq \frac{u_m^2}{2y_m + \alpha} \prod_{r=1}^{m-1} \left(\frac{y_m - y_r}{y_m + y_r + \alpha} \right)^2.$$

Ähnliche Abschätzungen (mit analogen Nebenbedingungen) für folgende Formen:

$$\begin{aligned} & \sum_{r,s=1}^m \left(\frac{1}{y_r + y_s + \alpha} + \beta \right) u_r u_s, \quad \sum_{r,s=1}^m \left(\frac{1}{y_r + y_s} + \alpha y_r y_s \right) u_r u_s, \\ & \sum_{r,s=1}^{m-1} \frac{u_r u_s}{y_r + y_s + \alpha} + 2\beta u_m (u_1 + u_2 + \dots + u_{m-1}), \\ & \sum_{r,s=1}^m \frac{u_r u_s}{y_r + y_s + \alpha} + 2\beta u_m (u_1 + u_2 + \dots + u_m), \\ & \sum_{r,s=1}^{m-1} \left(\frac{1}{y_r + y_s + \alpha} + \beta \right) u_r u_s + 2\gamma u_m (y_1 u_1 + y_2 u_2 + \dots + y_{m-1} u_{m-1}). \end{aligned}$$

Als Grundlage zum Beweis dieser Abschätzungen dient eine Determinantenformel von Cauchy und eine Verallgemeinerung derselben von v. d. Corput.

Jarník (Praha).

Jones, Burton W.: On Selling's method of reduction for positive ternary quadratic forms. *Amer. J. Math.* **54**, 14–34 (1932).

Es sei

$$f = \sum_{i,k=1}^3 c_{ik} x_i x_k \quad (c_{ik} = c_{ki}, \text{ reell}) \quad (1)$$

eine positive, ternäre, quadratische Form. Man führt neue Koeffizienten $c_{i4} = c_{4i}$ ($i = 1, \dots, 4$) ein, und zwar so, daß

$$\sum_{k=1}^4 c_{ik} = 0. \quad (i = 1, \dots, 4) \quad (2)$$

Eine positive, ternäre Form heißt nach Selling reduziert, wenn

$$c_{ik} \leq 0. \quad (i \neq k; i, k = 1, \dots, 4) \quad (3)$$

Ist eine Form f reduziert, dann sind auch alle Formen reduziert und mit f äquivalent, die aus f durch Vertauschen der Indizes ($i = 1, \dots, 4$) hervorgehen. Gelten in den Reduktionsbedingungen (3) nur die Ungleichheitszeichen, dann gibt es keine weiteren äquivalenten reduzierten Formen. Gelten auch Gleichheitszeichen, dann ist die Anzahl der äquivalenten reduzierten Formen größer. Will man untersuchen, ob zwei gegebene Formen gleicher Determinante äquivalent sind, so reduziert man die Formen. Stimmen die reduzierten Formen überein, dann sind die Formen äquivalent. Stimmen die reduzierten Formen nicht überein und gibt es in jeder Klasse nur eine reduzierte Form, dann sind die Formen nicht äquivalent. Nach der Sellingschen Reduktionstheorie gibt es aber in jeder Klasse mehrere reduzierte Formen, und man muß prüfen, wann zwei reduzierte Formen äquivalent sind, welche Untersuchung im vorliegenden Fall allerdings nicht schwer ist. Durch Verschärfen der Reduktionsbedingungen kann man erreichen, daß in einer Klasse nur eine reduzierte Form existiert. Diese Aufgabe behandelt der Verf. und gelangt nach längerer Rechnung zu einer Reihe von Ungleichungen, die nur von einer Form aus einer Klasse erfüllt werden. Die neuen Reduktionsbedingungen haben den Nachteil, daß sie nicht so einfach sind und daß die schönen Symmetrieeigenschaften, durch die sich die Sellingsche Reduktionsmethode vor allen anderen Methoden auszeichnet, zum Teil verlorengegangen sind. Im 3. Abschnitt vergleicht der Verf. die verschärfte Reduktionsmethode von Selling mit der von Seeber-Eisenstein und stellt im 4. Paragraphen die Automorphien auf. *Hofreiter (Wien).*

Pall, Gordon: On the application of a theta formula to representation in binary quadratic forms. (*California Inst. of Technol., Pasadena.*) Bull. Amer. Math. Soc. **37**, 863—869 (1931).

Die Bestimmung der Anzahl der Lösungen der Diophantischen Gleichung $ax^2 + by^2 = N$ kann nach Dirichlet auf die Untersuchung der Gleichung

$$\sum_{x,y} q^{ax^2+by^2} = (ab)^{-1/2} \Phi(2K/ab)$$

zurückgeführt werden, wo a, b relativ prime positive ganze Zahlen sind und

$$\Phi(u) = \frac{2K}{\pi} \prod_{l=1}^{(a-1)/2} t(lbu) \prod_{h=1}^{(b-1)/2} t(hau); \quad t(u) = \frac{sn u \, dn u}{cn u}.$$

Auf dieser Grundlage hat Nazimoff die gesuchte Anzahl von Lösungen in den Fällen $a = 1, b = 1, 3$ und 5 bestimmt. Der Verf. untersucht hier den Fall $a = 1, b = 7$ und zeigt, daß für ungerade Werte von a und b keine anderen Fälle existieren, wo die Nazimoffsche Methode anwendbar wäre. *Myrberg (Helsinki).*

Pall, Gordon: Large positive integers are sums of four or five values of a quadratic function. (*California Inst. of Technol., Pasadena.*) Amer. J. Math. **54**, 66—78 (1932).

Für $f(x) = \frac{1}{2}mx^2 + \frac{1}{2}nx$, $m > 0$, m und n ganz, $(m, n) = 1$ oder 2 wird, bei gegebenem p , die Auflösbarkeit der Gleichung $p = \sum_{i=1}^s f(x_i)$ untersucht in ganzen Zahlen $x_i \geq -k$, $k \geq 0$; dabei werden hauptsächlich die Fälle $s = 4$ oder 5 behandelt.

Die Gleichung ist äquivalent mit $8mp + sn^2 = \sum_{i=1}^s (2mx_i + n)^2$ und daher beziehen sich die Sätze auf Summen von Quadraten von Gliedern einer arithmetischen Reihe. — Zwei Erweiterungen (deren Beweise in einer späteren Abhandlung gegeben werden) eines Cauchyschen Satzes über die Auflösbarkeit in ganzen x_i der Gleichungen

$a = x_1^2 + \dots + x_i^2$ und $b = x_1 + \dots + x_4$ werden benutzt. Bewiesen wird: Die Gleichung für $s = 4$ ist, ausgenommen im Falle $m:2$ ungerade und $n:2$ gerade, auflösbar in ganzen Zahlen $x_i \geq 0$ für jedes $p >$ als eine gewisse Funktion von m und n . Ist $m:2$ ungerade und ≥ 5 und $n:2$ gerade, so ist die Gleichung nicht auflösbar nur für eine endliche Anzahl ungerade $p > 0$ und für eine unendliche Anzahl gerade $p \geq 0$, und für diese geraden p bilden die Zahlen $2mp + n^2$ eine endliche Anzahl von Reihen $4^h t_v$, $h = 0, 1, 2, \dots$, worin t_v gerade Zahlen sind und l eine gewisse positive ganze Zahl. Weiter werden alle Zahlen q bestimmt, für welche die Gleichung

$$3q + 4 = (3x_1 + j)^2 + \dots + (3x_4 + j)^2 \quad j = 1 \text{ oder } 2$$

unauflösbar ist in ganzen Zahlen $x_i \geq -k$, $k \geq 0$. Druckfehler in (5_s): $(2mx + n)^2$

muß sein: $\sum_{i=1}^s (2mx_i + n)$.

N. G. W. H. Beeger (Amsterdam).

Shohat, J.: On Stieltjes continued fractions. Amer. J. Math. 54, 79–84 (1932).

$\psi(x)$ sei eine niemals abnehmende Funktion, deren Momente für das endliche oder unendliche Intervall $(0, \beta)$

$$\alpha_r = \int_0^\beta x^r d\psi(x), \quad r = 0, 1, \dots; \alpha_0 > 0$$

existieren. Zu $\psi(x)$ gehört einerseits ein normiertes Orthogonalsystem von Polynomen $\varphi_r(x)$

$$\int_0^\beta \varphi_r(x) \varphi_\mu(x) d\psi(x) = \begin{cases} 0, & r \neq \mu \\ 1, & r = \mu \end{cases}$$

andererseits ein Kettenbruch

$$\int_0^\beta \frac{d\psi(t)}{x-t} = \frac{1}{b_1 x} + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3 x} + \frac{1}{b_4} + \dots$$

Die Näherungsnenner $B_r(x)$ dieses Kettenbruches lassen sich in bekannter Weise durch die $\varphi_r(x)$ ausdrücken. Der Verf. gibt eine solche einfache Darstellung für $B_{2n+1}(x)$ und wendet diese auf die mechanische Quadratur an. Otto Szász.

Analysis.

Biernacki, M.: Sur le théorème de Rolle. Bull. Math. et Phys. École polytechn. 2, 164–170 (1931).

Es sei $\theta(m)$ definiert durch die Eigenschaften: 1. Wenn $P(x)$ ein Polynom höchstens m -ten Grades mit reellen Koeffizienten ist, das für $x = \pm 1$ verschwindet, so besitzt $P'(x)$ mindestens eine Nullstelle im Intervall $-\theta(m) \leq x \leq \theta(m)$. 2. In beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ gibt es ein Polynom der genannten Klasse, dessen Ableitung im Intervall $-\theta(m) + \varepsilon < x < \theta(m) - \varepsilon$ nicht verschwindet. Für die so definierte Funktion $\theta(m)$ werden eine Reihe von Sätzen abgeleitet. Man vgl. zu demselben Thema Arbeiten von Tchakaloff (dies. Zbl. 1, 57, 58). Rellich (Göttingen).

Abason, Ernest: Sur la moyenne des fonctions paraboliques. Bull. Math. et Phys. École polytechn. 2, 170–177 (1931).

Das Integral $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b y_n(x) dx$ mit $y_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$

wird in der Form $\mu = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots + A_k y_k}{A_1 + A_2 + \dots + A_k}$ mit explizit angegebenen A_k geschrieben. Rellich (Göttingen).

Hanna, M.: On the condition that a certain integral may be rational. Proc. London Math. Soc., II. s. 33, 190–194 (1931).

The problem solved in this paper is the statement of a necessary and sufficient condition that the integral

$$I \equiv \int \{ (b_0 x^{2n} + 2n b_1 x^{2n-1} + \dots + b_{2n}) / (a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2)^{n+1} \} dx,$$

shall be rational, i. e. of the form

$$f \equiv \{c_0 x^{2n-1} + (2n-1)c_1 x^{2n-2} + \dots + c_{2n-1}\} / (a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2)^n.$$

This condition is found to be the vanishing of the invariant of the two forms (a_0, a_1, a_2) $(b_0, b_1, \dots, b_{2n})$ whose leading term is $a_0^2 b_0$. Davis (Bloomington).

Kowalewski, Gerhard: Ein neuer Beweis des Euler-Maclaurinschen Theorems. *J. f. Math.* **167**, 46—51 (1932).

This proof of the Euler-Maclaurin summation formula is based on the relation

$$f(x) = \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b) + \int_a^b \delta(x, u) f''(u) du, \quad (a \leq x \leq b)$$

where

$$\delta(x, u) = \frac{1}{2} \left| x - u \right| - \frac{(x-a)(b-u) + (u-a)(b-x)}{2(b-a)},$$

and employs the sequence of functions which is obtained when one repeatedly subjects a function $\varphi(x)$ satisfying the equation $\varphi(a+b-x) = -\varphi(x)$, to the Fredholm operator

$$\int_a^b \delta(x, u) \varphi(u) du.$$

The well known Malmsten and Jacobi forms for the remainder in the summation formula are found, and an application is made to Bernoulli polynomials.

C. R. Adams (Providence).

Tchakaloff, L.: Sur les formules de quadrature à nombre minimum de termes. *Bull. Math. et Phys. École polytechn.* **2**, 160—163 (1931).

Gefragt wird nach der kleinsten Zahl n derart, daß für $2n$ feste Zahlen x_1, x_2, \dots, x_n und A_1, A_2, \dots, A_n die Gleichung

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + \dots + A_n f(x_n)$$

für alle Polynome $f(x)$ von höchstens m -ten Grad gleichzeitig erfüllt ist. Es zeigt sich, daß $n > \frac{m}{2}$ sein muß. Für die Fälle $n = \frac{m}{2} + 1$ und $n = \frac{m+1}{2}$ werden die A_k mit Hilfe der Legendreschen Polynome explizit durch die x_k ausgedrückt. Rellich.

Fejér, Leopold: Lagrangesche Interpolation und die zugehörigen konjugierten Punkte. *Math. Annalen* **106**, 1—55 (1932).

$\omega(x)$ étant un polynome de degré n dont les racines x_k ($a \leq x_k \leq b$) servent de nœuds d'interpolation de Lagrange, l'auteur envisage les points $X_k = x_k + \frac{\omega'(x_k)}{\omega''(x_k)}$ qu'il appelle valeurs conjuguées des nœuds x_k . Sa plus grande partie du Mémoire est consacrée à l'étude du cas (A) où les points conjugués sont extérieurs au segment ab . Par des considérations extrêmement simples l'auteur établit la convergence des polynomes de Lagrange pour des classes de fonctions assez étendues (condition de Lipschitz d'ordre supérieur à $\frac{1}{2}$). La propriété indiquée des valeurs conjuguées, dont l'auteur s'était occupé à un point de vue un peu différent dans deux Mémoires antérieurs (*Math. Ann.* **102**, 707—725; *Math. Z.* **32**, 426—457) appartient aux polynomes de Tchebyscheff et Legendre, et d'une façon plus générale aux polynomes de Jacobi $S_n(\alpha, \beta, x)$, $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$, $0 \leq \beta \leq \frac{1}{2}$. Sans entrer dans les détails, il y a lieu de noter l'identité fondamentale

$$\sum_{k=1}^n h_k(x) = 1,$$

où

$$h_k(x) = \left[1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} (x - x_k) \right] \left[\frac{\omega(x)}{(x - x_k) \omega'(x_k)} \right]^2$$

qui conduit à des inégalités importantes. — La classe des polynomes (A) étant assez particulière, l'auteur l'élargit par la considération de ceux des polynomes, pour lesquels on peut indiquer un intervalle $a'b'$ intérieur à ab ne contenant aucun des points con-

jugués. Toutes les propriétés de convergence se démontrent alors avec la même simplicité pour le segment (plus petit) $a'b'$. Un tel segment $a'b'$ existe pour les polynômes de Jacobi des paramètres quelconques $\alpha > 0$, $\beta > 0$, comme le démontre l'auteur dans la dernière partie du Mémoire.

S. Bernstein (Charkow).

Bailey, W. N.: On one of Ramanujan's theorems. J. London Math. Soc. 7, 34—36 (1932).

$$\begin{aligned} \text{Beweis, daß: } & \frac{\Gamma(x+m)\Gamma(y+m)}{\Gamma(m)\Gamma(x+y+m)} {}_3F_2 \left[\begin{matrix} x, y, v+m-1 \\ v, x+y+m \end{matrix} \right] \text{ to } n \text{ terms} \\ &= \frac{\Gamma(x+n)\Gamma(y+n)}{\Gamma(n)\Gamma(x+y+n)} {}_3F_2 \left[\begin{matrix} x, y, v+n-1 \\ v, x+y+n \end{matrix} \right] \text{ to } m \text{ terms.} \end{aligned}$$

Autoreferat.

Varma, Rama Shankar: Some inequalities satisfied by the hypergeometric series in two variables. J. Indian Math. Soc. 19, 88—91 (1931).

Eine von Tchebycheff herrührende Integralabschätzung wird in verschiedener Weise auf das verallgemeinerte „hypergeometrische Integral“

$$F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y) = \int_0^1 u^{\alpha-1} (1-u)^{\gamma-\alpha-1} (1-ux)^{-\beta} (1-uy)^{-\beta'} du$$

angewandt. v. Koppenfels (Hannover).

Bateman, H.: Relations between confluent hypergeometric functions. (Daniel Guggenheim Graduate School of Aeronaut., California Inst. of Technol., Pasadena.) Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 17, 689—690 (1931).

Several of the functions introduced in the author's paper in Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 17, 562 (1931) (vgl. dies. Zbl. 2, 293) are shown to be expressible in terms of the confluent hypergeometric function, and various analytic expressions are obtained for them.

Whittaker (Edinburgh).

Bochner, S.: Die Poissonsche Summationsformel in mehreren Veränderlichen. Math. Annalen 106, 56—63 (1932).

Unter den Voraussetzungen: a) die Funktion $f(x_1, \dots, x_k)$ ist im ganzen Raum definiert, im Endlichen beschränkt und integrierbar und in allen Gitterpunkten (x_1, \dots, x_k) ganz) stetig, b) die Reihe

$$\sum_{m_\nu=-\infty}^{+\infty} f(x_1+m_1, \dots, x_k+m_k) = F(x_1, \dots, x_k)$$

ist im Intervalle $-\frac{1}{2} \leq x_\nu < \frac{1}{2}$ gleichmäßig konvergent, wird „die Poissonsche Formel“

$$\sum_{m_\nu=-\infty}^{+\infty} f(m_1, \dots, m_k) = \sum_{n_\nu=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \dots, x_k) e^{2\pi i(n_1 x_1 + \dots + n_k x_k)} dx_1 \dots dx_k$$

bewiesen. Was die Summe rechts betrifft, so ist darunter der Grenzwert im folgenden Sinne zu verstehen:

$$\sum_{n_\nu=-\infty}^{+\infty} a_{n_1 \dots n_k} = \lim_{n_\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{n_1 \dots n_k} \sum_{m_\nu=0}^{n_\nu} s_{m_1 \dots m_k},$$

mit

$$s_{m_1 \dots m_k} = \sum_{h_\nu=-m_\nu}^{+m_\nu} a_{h_1 \dots h_k}.$$

Der Beweis stützt sich auf das Fejérsche Summationsverfahren, das auf die Fourierreihe der Funktion $F(x_1, \dots, x_k)$ angewandt wird. — Im besonderen erhält man daraus eine schöne Formel für die Anzahl der Gitterpunkte im Kreise $x^2 + y^2 = R^2$ ($R \neq \sqrt{n_1^2 + n_2^2}$)

$$\sum_{n_1, n_2=-\infty}^{+\infty} \frac{R}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} J_1(2\pi \sqrt{n_1^2 + n_2^2} R),$$

wo $J_1(x)$ die Besselsche Funktion bezeichnet. — Es folgt eine Abschwächung der Voraussetzung a), welche der letzten Formel auch im Falle $R = \sqrt{n_1^2 + n_2^2}$ in gewissem Sinne Gültigkeit gewährt.

W. Gontscharoff (Charkow).

Orlicz, W.: Quelques théorèmes sur les développements orthogonaux. C. R. Acad. Sci. Paris 194, 157—158 (1932).

Die Funktionenfolge $\{\varphi_\nu(x)\}_{(\nu=1,2,\dots)}$ sei ein im Intervall $\langle 0,1 \rangle$ normiertes Orthogonalsystem, d. h. $\int_0^1 \varphi_\nu(x) \varphi_\mu(x) dx = \delta_{\nu\mu}$. Verf. teilt folgende Sätze mit:

1. Ist $|\varphi_\nu(x)| \leq K < \infty$, so gibt es eine stetige Funktion $g(x)$, für welche, $a_\nu = \int_0^1 g(x) \varphi_\nu(x) dx$ gesetzt, die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu|^{2-\varepsilon}$ bei beliebigem $\varepsilon > 0$ divergiert.

2. Divergiert $\sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu^2(x)$ auf einer Menge von positivem Maße, so gibt es ein stetiges $g(x)$, für welches $\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu|$ divergiert. — Das Orthogonalsystem $\{\varphi_\nu(x)\}_{(\nu=1,2,\dots)}$ heißt

vollständig im Bereiche (L^α) der mit der α -ten Potenz im Lebesgueschen Sinne integrierbaren Funktionen, wenn aus $\int_0^1 f(x) \varphi_\nu(x) dx = 0$ und $f(x) \in (L^\alpha)$ die Identität $f(x) = 0$ fast überall folgt.

Es gelten die Sätze: 1'. Das System $\{\varphi_\nu(x)\}$ sei vollständig in (L^1) und $|\varphi_\nu(x)| \leq K < \infty$. Dann gibt es für jede divergente Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu^2$ eine Folge $\{a_\nu\}$ mit $|a_\nu| \leq |c_\nu|$, so daß $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \varphi_\nu(x)$ nicht die formale Entwicklung

einer Funktion aus (L^1) nach $\{\varphi_\nu(x)\}$ ist. 2'. Ist das System $\{\varphi_\nu(x)\}$ vollständig in (L^1) , so gibt es eine Folge $a_\nu \rightarrow 0$, so daß $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \varphi_\nu(x)$ nicht die formale Entwicklung

einer Funktion aus (L^1) ist. 3. Ist das System $\{\varphi_\nu(x)\}$ vollständig in (L^2) , so gibt es eine Folge $c_\nu \rightarrow 0$, so daß $\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu(x)$ fast überall divergiert. 4. Ist $|\varphi_\nu(x)| \leq K < \infty$, so gibt es eine Folge $c_\nu \rightarrow 0$, so daß $\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu(x)$ auf einer Menge von positivem Maße divergiert.

Birnbaum (Wien).

Birnbaum, Z. W., und W. Orlicz: Über die Verallgemeinerung des Begriffes der zueinander konjugierten Potenzen. Studia Math. (Lwów) 3, 1—67 (1931).

Zwei reelle stetige Funktionen $M(u)$, $N(u)$ heißen zueinander konjugiert, wenn sie die beiden Eigenschaften haben: 1. Aus der Konvergenz von $\sum M(a_\nu)$ und von $\sum N(b_\nu)$ folgt die Konvergenz der Reihe $\sum a_\nu b_\nu$. 2. Konvergiert $\sum a_\nu b_\nu$ für jede Reihe $\sum b_\nu$, bei der $\sum N(b_\nu)$ konvergiert, so konvergiert auch die Reihe $\sum M(a_\nu)$. — Nach der Hölderschen Ungleichung und nach einem Satz von Landau sind $M(u) = |u|^\alpha$, $N(u) = |u|^\beta$ mit $\alpha > 1$ und $1/\alpha + 1/\beta = 1$ konjugierte Potenzen. Die Verf. untersuchen und beantworten die Frage nach anderen Paaren konjugierter Funktionen, ebenso die entsprechende Frage für Integrale. Hierin sind gewisse Resultate von R. Cooper enthalten. Schließlich werden bekannte Sätze über starke bzw. schwache Konvergenz von Funktionenfolgen entsprechend verallgemeinert. Otto Szász.

Orlicz, W.: Über konjugierte Exponentenfolgen. Studia Math. (Lwów) 3, 200—211 (1931).

Die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ heiße konvergent mit dem Exponenten α , wenn $\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu|^\alpha$ konvergiert, und sie heiße konvergent mit der Exponentenfolge $\{\alpha_\nu\}$, wenn $\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu|^{\alpha_\nu}$

konvergiert. Ist $\alpha > 1$, so heißt der Exponent β konjugiert zu α , wenn $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, und analog heißt die durch $\frac{1}{\alpha_\nu} + \frac{1}{\beta_\nu} = 1$ erklärte Folge $\{\beta_\nu\}$ die zu $\{\alpha_\nu\}$, $\alpha_\nu > 1$,

konjugierte Exponentenfolge. Verf. beweist Sätze über konjugierte Exponentenfolgen, die bisher nur für konjugierte Exponenten bekannten Sätzen entsprechen; ferner wird der Zusammenhang zwischen der Konvergenz von Reihen mit einem Exponenten und der Konvergenz mit einer Exponentenfolge untersucht. Die Haupt-

ergebnisse lauten: 1. Damit bei beliebigen, mit der Exponentenfolge $\{\alpha_\nu\}$ konvergenten Reihen $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu b_\nu$ konvergiere, ist die Existenz einer Zahl k , $0 < k < 1$, notwendig und hinreichend, für welche $\sum_{\nu=1}^{\infty} |k b_\nu|^{\beta_\nu}$ konvergiert. 2. Gegeben ein Exponent $\alpha \geq 1$ und eine Exponentenfolge $\{\alpha_\nu\}$, $\alpha_\nu > \alpha$. Damit jede mit $\{\alpha_\nu\}$ konvergente Reihe auch mit α konvergiere, ist die Existenz einer Zahl k , $0 < k < 1$ notwendig und hinreichend, so daß $\sum_{\nu=1}^{\infty} k^{\gamma_\nu}$ konvergiert, wobei $\gamma_\nu = \frac{\alpha_\nu}{\alpha_\nu - \alpha}$ gesetzt wurde. — Ähnliche Sätze werden für Funktionen und Integrale formuliert. Zum Schluß werden Anwendungen auf trigonometrische Reihen und allgemeine Orthogonalreihen gegeben, von welchen noch die folgende als Beispiel angeführt werden soll: Es gibt eine Zahlenfolge $\beta_\nu \rightarrow 2$, $\beta_\nu > 2$ und eine trigonometrische Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$, die keine Fourier-Reihe ist, für welche jedoch $\sum_{\nu=1}^{\infty} (|a_\nu|^{\beta_\nu} + |b_\nu|^{\beta_\nu})$ konvergiert. *Birnbaum.*

Zygmund, A.: Quelques théorèmes sur les séries trigonométriques et celles de puissances. *Studia Math.* (Lwów) **3**, 77–91 (1931).

Die Arbeit besteht aus vier voneinander unabhängigen Noten. — I. Ist $s_n(x) = \sum_{k=1}^n (a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x)$ in allen Punkten eines Intervalles für jedes n beschränkt und $n_{k+1}/n_k > q > 1$, dann ist $\sum_{k=1}^n |a_k| + |b_k|$ konvergent. — Nebst dem Beweise dieses Satzes, der eine Verallgemeinerung eines Fatouschen Satzes [*Acta Math.* **30**, 397 (1906)] ist, deutet Verf. noch an, daß in diesem Satze schon die einseitige Beschränktheit von $s_n(x)$ genügt; es genügt sogar, die Toeplitzschen Mittel von $s_n(x)$ einseitig zu beschränken. — II. Es sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $|z| < 1$, und es existiere fast überall $\lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta}) = f^*(\theta)$. Dann wird $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^*(\theta) e^{-in\theta} d\theta$, $n = 0, 1, 2, \dots$, wenn $f^*(\theta)$ L -integrabel ist, und $\int_0^{2\pi} \varphi \{ \log |f(re^{i\theta})| \} d\theta = O(1)$, $r \rightarrow 1$, wo $\varphi(x)$, für $x > 0$, meßbar und im Endlichen beschränkt ist, und $\varphi(x)/x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow \infty$. Der Satz gilt nicht, wenn $\varphi(x) \equiv x$. — (Das letzte wird durch das Beispiel $f(z) = \exp \frac{1+z}{1-z}$ gezeigt.) Der Spezialfall $\varphi(x) = \exp a x$, $a > 0$, rührt von Smirnow [C. R. **188**, 87–95 (1929)] her. — III. Der dritte Teil bezieht sich auf die Differenzierbarkeit der Fourierreihen, und Verf. beweist, daß die von W. H. Young [*Proc. London Math. Soc.* **17**, 195–236 (1918)] und Rajchman [*Prace Mat.-Fiz.* **28**, 213–219 (1917)] gegebene hinreichende Bedingung für die Differenzierbarkeit der Fourierreihen auch notwendig ist. — IV. Zuletzt wird noch der folgende Satz von Carleman [C. R. **174**, 373 (1922)]: „Ist $f(z)$ regulär in $R(z) > 0$, stetig und beschränkt in $R(z) \geq 0$; ist weiter $|f(\pm ri)| < e^{-\gamma(r)}$ ($0 \leq r < \infty$), wo $\gamma(r)$ endlich und R -integrabel in jedem endlichen Intervalle ist, so ist $f(z) \equiv 0$, wenn $\int_0^\infty \gamma(r) r^{-2} dr$ divergiert“, elementar bewiesen, indem Verf. statt $f(z)$ in $R(z) \geq 0$ eine Funktion $g(\zeta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \zeta^\nu$ in $|\zeta| \leq 1$ betrachtet und beweist, durch Zuhilfenahme der Funktion $g(\zeta) g(\zeta \omega) \dots g(\zeta \omega^{n-1})$, $\omega = \exp 2\pi i/n$, daß $a_\nu = 0$, $\nu = 0, 1, 2, \dots$, wenn $|g(e^{\pm i\theta})| < e^{-\delta(\theta)}$, $0 < \theta \leq \pi$, und $\int_0^\pi \delta(\theta) d\theta = \infty$, ist. *Karamata* (Beograd).

Sidon, S.: Einige Sätze und Fragestellungen über Fourier-Koeffizienten. *Math. Z.* **34**, 477—480 (1932).

The following results are obtained: Let $\{\varepsilon'_n\}, \{\varepsilon''_n\}$ be two arbitrary real sequences such that $\varepsilon'_n, \varepsilon''_n \rightarrow 0$. Let $\{\lambda_n\}$ be a sequence of positive integers satisfying the condition $\lambda_{n+1}/\lambda_n > q > 1$. Then there exist (1) a harmonic positive function

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) r^n, \quad r < 1,$$

and (2) a Fourier series $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$ with $a_{\lambda_n} = \varepsilon'_n, b_{\lambda_n} = \varepsilon''_n$.

J. D. Tamarkin (Providence).

Wolff, J., et P. G. J. Vredenduin: Sur les coefficients d'une série de Fourier. *Nieuw Arch. Wiskde* **17**, 144—146 (1932).

M. F. Riesz a donné un exemple de fonction de période 2π , continue et à variation bornée sur tout interval fini, et telle que ses coefficients b_n de Fourier ne sont pas infiniment petits par rapport à $1/n$ pour n infini (vgl. *Mathem. Zeitschr.* **2**, 313). Nous donnerons un exemple analogue, mais plus élémentaire. *Autoreferat.*

Kaczmarz, S.: Une remarque sur les séries. *Studia Math.* (Lwów) **3**, 95—100 (1931).

m Verf. beweist, daß der Satz von Szidon [*Math. Z.* **10**, 121—127 (1921)]: „Ist $\sum_{n=1}^m \lambda_n a_n$ absolut beschränkt für jede beliebige monotone Nullfolge $\{\lambda_n\}$, so ist auch $\sum_{n=1}^m a_n$ absolut beschränkt“, auch dann richtig bleibt, wenn die Nullfolgen $\{\lambda_n\}$ der Bedingung der Konvexität unterworfen sind. — Als Anwendung dieses Satzes wird gezeigt, daß es Fourierreihen von der Form $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \cos nx, \lambda_n \rightarrow 0, \Delta^2 \lambda_n > 0$, gibt, für welche $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{\nu=1}^n \lambda_\nu \cos \nu x \right| dx = \infty$ ist. — Weiter wird der folgende, ebenfalls von Szidon herrührende Satz: „ $s_m = \sum_{n=1}^m a_n$ ist absolut beschränkt, wenn die arithmetischen Mittel der Partialsummen von $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n a_n$, bei beliebiger

monotonen Nullfolge $\{\lambda_n\}$, absolut beschränkt sind“, auf die verallgemeinerten Toeplitzschen Mittel erweitert. *Karamata* (Beograd).

Hardy, G. H., and E. C. Titchmarsh: Formulae connecting different classes of self-reciprocal functions. *Proc. London Math. Soc.*, II. s. **33**, 225—232 (1931).

The following rules are established (some of them formally): 1. If $f(x)$ is its own cosine (sine) Fourier transform, then $h(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} f(t) dt$ is its own sine (cosine) F.T. Let R_μ be the set of all the functions $f(x)$ which are their own Hankel transforms of order μ , $f(x) = \int_0^{\infty} \sqrt{xt} J_\mu(xt) f(t) dt$. Let $R_C \equiv R_{-1/2}, R_S \equiv R_{1/2}$. Then 2. the kernel $(xt)^{1/2(\mu+\nu+1)} K_{1/2(\nu-\mu)}(xt)$ transforms R_μ into R_ν . 3. The most general kernel $k(xt)$ which transforms R_C into R_S is that defined by

$$k(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Gamma(s) \chi(s) x^{-s} ds \quad \text{where} \quad \chi(s) = \chi(1-s).$$

J. D. Tamarkin (Providence).

Kogbetliantz, E.: Sur la convergence des séries d'Hermite. *C. R. Acad. Sci. Paris* **194**, 161—163 (1932).

Bezeichnet man $e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} = H_n(x)$ und $\frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} f(u) H_n(u) du = c_n$, so ergibt sich unmittelbar aus einem Satze des Verf. (vgl. dies. Zbl. **2**, 188) folgendes:

Die Bedingung $f(x) = O(|x|^{-\varepsilon} e^{x^2/2})$ mit $\varepsilon > 0$ ist hinreichend dafür, daß die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n(x) \quad (1)$$

in jedem Punkte x konvergiert, in dessen Umgebung $f(x)$ gewisse Regularitätseigenschaften aufweist, z. B. von beschränkter Schwankung ist. Verf. hat auch (l. c.) an Beispielen gezeigt, daß die Bedingung $f(x) = O(|x|^\alpha e^{x^2/2})$ mit noch so kleinem α

nicht genügt, um die Konvergenz von (1) in allen solchen Punkten zu sichern. In der vorliegenden Note wird ein Beispiel dafür angegeben, daß auch die Bedingung $f(x) = O(e^{x^2/2})$ nicht hinreichend ist. Birnbäum (Wien).

Differentialgleichungen:

Weil, A.: On systems of curves on a ring-shaped surface. J. Indian Math. Soc. 19, 109—112 (1931).

Einfache Ableitung Poincaréscher Resultate über die Lösungen der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$, wobei f analytisch und periodisch in x und y ist, mit der Periode 1. Es sei C eine Lösung mit der Gleichung $y = \varphi(x)$. Ein Punkt (ξ, η) heißt „über“ oder „unter“ C gelegen, je nachdem $\eta - \varphi(\xi) > 0$ oder < 0 ist. Von zwei Lösungen verläuft eine immer ganz unterhalb der anderen. Sind p und q beliebige ganze Zahlen, so ist auch die Kurve $C(p, q)$ mit der Gleichung $y - q = \varphi(x - p)$ eine Lösung. Teilt man diese Kurven in zwei Klassen ein, je nachdem sie unterhalb C verlaufen oder nicht, so wird dadurch unter den rationalen Zahlen q/p ein Schnitt erzeugt: die so definierte Zahl heiße μ . Ist $q \leq \mu p < q + 1$, so gilt dann $\varphi(x) + q \leq \varphi(x + p) < \varphi(x) + q + 1$, woraus sich $\varphi(x) = \mu x + O(1)$ ergibt; d. h. C verläuft in einem Streifen endlicher Breite um die Asymptote $y = \mu x$. Nun sei μ rational $= n/m$: dann ist $\varphi(x) - nx/m$ periodisch mit der Periode m . Um das zu zeigen, ordne man der durch (x, y) gehenden Lösung als Parameter $\tau(x, y)$ die obere Grenze der Zahlen $q - \mu p$ zu, für die $C(p, q)$ noch unter ihr verläuft. Bei festem x_0 ist $\tau(x_0, y)$ eine nicht fallende Funktion. Sei y_0 die obere Grenze der y -Werte, für die $\tau(x_0, y) \leq 0$, D die durch (x_0, y_0) gehende Lösung. Verläuft eine Lösung unter D , so ist ihr Parameter ≤ 0 , sonst > 0 . Da $\mu = n/m$, ändert eine Translation $(\pm m, \pm n)$ die Parameterwerte nicht: die Kurven $D(\pm m, \pm n)$ haben daher dieselbe Eigenschaft wie D . Wenn sie nun unterhalb D verliefen, müßten die Lösungen, die über ihnen, aber unter D verlaufen, Parameter besitzen, die sowohl > 0 als auch ≤ 0 sein müßten. Daher fallen $D(\pm m, \pm n)$ und D zusammen, w. z. b. w. Willy Feller (Kiel).

Hoheisel, Guido: Kurvenfelder bei Differentialgleichungen erster Ordnung. Sitzsber. preuß. Akad. Wiss., Physik.-math. Kl. H. 27/29, 663—669 (1931).

Für eine im Streifen $0 \leq x \leq a$ definierte Schar von eindeutigen stetigen Kurven $y(x)$ mit den Eigenschaften: 1. durch jeden Punkt geht wenigstens eine Kurve der Schar, 2. mit y_1 und y_2 gehören auch alle eindeutigen stetigen Kurven $y(x)$ zur Schar, die sich aus Stücken von y_1 und y_2 zusammensetzen, 3. wenn die durch den Punkt $P(x_P, y_P)$ hindurchgehenden Kurven der Schar P -Kurven genannt werden, so soll P der einzige auf der Geraden $x = x_P$ gelegene Häufungspunkt von Punkten der P -Kurven sein, zeigt der Autor u. a.: Ist die Menge der Punkte von O -Kurven (O ist der Nullpunkt) beschränkt, dann gibt es zwei in $0 \leq x \leq a$ stetige Kurven $G(x), g(x)$ [$g \leq G, g(0) = G(0) = 0$], die nicht zur Schar zu gehören brauchen, aber Grenzfunktionen einer gleichmäßig konvergenten monotonen Folge von O -Kurven sind, während alle O -Kurven im Bereich $0 \leq x \leq a + 0$; $g(x) \leq y \leq G(x)$ liegen und durch jeden inneren Punkt dieses Bereiches wenigstens eine O -Kurve geht. Anwendung dieses Resultates auf die Lösungskurven einer Differentialgleichung: $y' = f(x, y)$ wobei f für $0 \leq x \leq a$ stetig sein soll, führt zum Peano-Perronschen Satz, wonach durch O für $0 \leq x \leq a$ eine maximale und eine minimale Lösung $G(x) \geq g(x)$ gehen,

während durch jeden Punkt t, u mit $0 < t \leq a$, $g(t) \leq u \leq G(t)$ wenigstens eine in O einlaufende Kurve geht. — Einige weitere Resultate über die O -Kurven beziehen sich auf die Fälle, daß nicht mehr die Beschränktheit der Menge der Punkte von O -Kurven gefordert wird oder daß daneben auch die Bedingung 3 fortgelassen wird.

J. Ridder (Groningen).

Birkhoff, George D.: Proof of a recurrence theorem for strongly transitive systems. (*Dep. of Math., Harvard Univ., Cambridge [U. S. A.]*) Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **17**, 650—655 (1931).

Birkhoff, George D.: Proof of the ergodic theorem. (*Dep. of Math., Harvard Univ., Cambridge [U. S. A.]*) Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **17**, 656—660 (1931).

Es sei gegeben ein System $\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \dots, x_n)$ von n Differentialgleichungen erster Ordnung, wo die $X_i(x_1, \dots, x_n)$ auf einer geschlossenen singularitätsfreien Mannigfaltigkeit definiert sind. $X_i(x_1, \dots, x_n)$ sind nach Voraussetzung analytische Funktionen von x_1, \dots, x_n . Es wird ferner angenommen, daß das Differentialgleichungssystem die Integralinvariante $\int dx_1 \dots dx_n$ (in einem passend gewählten Koordinatensystem) besitzt. Endlich wird vorausgesetzt, daß das vorliegende System stark transitiv (strongly transitive) ist, d. h. daß jede metrische Punktmenge, die aus vollen Integralkurven gebildet ist, entweder das Maß 0 oder das Maß der gesamten Mannigfaltigkeit M besitzt. — Der Verf. betrachtet eine $(n-1)$ -dimensionale analytische Hyperfläche σ in M , die die Eigenschaft besitzt, daß sie jede Integralkurve unter einem Winkel θ schneidet, der größer als eine feste positive Zahl d ist. Nach Poincaré (*Methodes nouvelles de la Mécanique celeste*) schließt der Verf., daß für fast alle Punkte der Hyperfläche σ (mit Ausnahme vielleicht einer Menge vom Lebesgueschen Maß 0) die entsprechenden Integralkurven unendlich viele Schnittpunkte mit σ haben, wenn t sich in einer der beiden Richtungen $t \rightarrow +\infty$ und $t \rightarrow -\infty$ bewegt.

Den Inhalt der ersten Arbeit bildet folgender Satz: Bedeutet t_n den Wert von t , der dem n -ten Schnittpunkt mit σ einer vom Punkte P von σ ausgehenden Integralkurve entspricht, so wird notwendigerweise eine solche von P unabhängige Zahl τ existieren, daß für fast alle Punkte P auf σ $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n(P)/n = \tau$ ist. Beim Beweise wird benutzt die folgende Formel:

$$\int_{\sigma} t_n(P) v \cos \theta d\sigma / n \int_{\sigma} v \cos \theta d\sigma = V / \int_{\sigma} v \cos \theta d\sigma,$$

wo $v = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2}$ die „Geschwindigkeit“ im Punkte P bedeutet, und die linke

bzw. rechte Seite als die mittlere Zeit des n -ten Schnittpunktes bzw. Verhältnis des Gesamtvolumens V der Mannigfaltigkeit M zum „Gesamtstrom“ durch σ interpretiert werden kann.

In der zweiten Arbeit werden analoge Fragen behandelt, aber ohne der Voraussetzung der starken Transitivität. Es wird die folgende Verallgemeinerung des vorhergehenden Satzes bewiesen: $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n(P)/n = \tau(P)$ (für fast alle Punkte P auf σ). Hier

ist also die „mittlere Rückkehrzeit“ nicht mehr vom Punkte P unabhängig. Daraus wird der Beweis des „ergodischen Satzes“ abgeleitet: Für fast alle Punkte P von M existiert eine bestimmte „zeitliche Wahrscheinlichkeit“ p dafür, daß während der weiteren Bewegung dieser Punkt in einem bestimmten, beliebig vorgegebenem Gebiet G enthalten sein wird; d. h. existiert der Grenzwert von t/t ($t \rightarrow \pm\infty$), wo t die Verweilzeit des Punktes P im Gebiete G bedeutet. Für den Fall eines stark transitiven Systems ist diese Wahrscheinlichkeit gleich dem Verhältnis des Volumens des Gebietes G zum Gesamtvolumen der Mannigfaltigkeit M . — Der Beweis beruht auf folgendem Hilfssatz: Die vom Punkte P ausgehende Integralkurve schneide die Hyperfläche σ zum ersten Male im Punkte P' , und es bedeute S_t bzw. $S_{t'}$ eine meßbare Menge auf σ , die in bezug

auf die Transformation $P \rightarrow P'$ invariant bleibt (mit Ausnahme einer Menge vom Maße 0) und für deren Punkte P

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} t_n(P)/n \geq \lambda > 0 \quad \text{bzw.} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} t_n(P)/n \leq \lambda' > 0$$

gilt. Der zugrunde liegende Hilfssatz behauptet dann:

$$\int_{S_\lambda} t(P) v \cos \theta d\sigma \geq \lambda \int_{S_\lambda} v \cos \theta d\sigma \quad \text{bzw.} \quad \int_{S_{\lambda'}} t(P) v \cos \theta d\sigma \leq \lambda' \int_{S_{\lambda'}} v \cos \theta d\sigma.$$

L. Schnirelmann (Moskau).

Burchall, J. L., and T. W. Chaundy: Commutative ordinary differential operators.

II. The identity $P^n = Q^m$. Proc. Roy. Soc. London A **134**, 471–485 (1931).

This paper is a sequel to one published in the Proc. Roy. Soc. London A **118**, 557 to 583 (1928). It was there shown that a pair of commutative differential operators P, Q of orders m and n (m and n relatively prime) satisfy an algebraic equation $f(P, Q) = 0$. If the curve $f(p, q) = 0$ possesses double points the theory of the previous paper is not complete. The present paper discusses in detail the case $f(P, Q) \equiv P^n - Q^m$; it is shown that all commutative operators P, Q for which $P^n - Q^m = 0$ are effectively known when all operators U satisfying $UD^m = PU$; $UD^n = QU$ (D the operator $\frac{d}{dx}$) are known. If the order of U is equal to the genus of the curve $p^n - q^m = 0$ any operator commutative with P and Q is of the form $h(P, Q)$ where h is a polynomial with constant coefficients whelst if the order of U is less than the genus there is at least one operator, not of this form, which is commutative with P and Q . The particular case of the pair of operators $P = x^{-m} \delta(\delta - n)(\delta - 2n) \dots (\delta - mn + n)$; $Q = x^{-n} \delta(\delta - m)(\delta - 2m) \dots (\delta - mn + m)$ (where $\delta = xD$) which satisfy $P^n = Q^m$ is discussed in detail.

Murnaghan (Baltimore).

Bliss, G. A., and I. J. Schoenberg: On separation, comparison and oscillation theorems for self-adjoint systems of linear second order differential equations. Amer. J. Math. **53**, 781–800 (1931).

Die Verff. behandeln eine Verallgemeinerung der Sturmschen Sätze auf ein selbst-adjungiertes System von linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die Funktionen $y_i(x)$

$$\frac{d}{dx} \Omega y'_i - \Omega y_i = 0,$$

wobei

$$2\Omega = P_{ik}(x) y_i y_k + 2Q_{ik}(x) y_i y'_k + R_{ik}(x) y'_i y'_k$$

ist, mit positiv definiten Form R . — Der Punkt $x = \xi_1$, der zum Punkt $x = \xi$ nächstbenachbart so liegt, daß es ein System von Lösungen $y_i(x)$ gibt, die alle bei $x = \xi$ und bei $x = \xi_1$ verschwinden, heißt zum Punkt $x = \xi$ konjugiert. Eine Folge von zueinander konjugierten Punkten $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < \dots < \xi_k$ heißt ein konjugiertes System. Auf solche konjugierten Systeme beziehen sich die verallgemeinerten Sturmschen Sätze. Unter anderem gilt das „Oszillationstheorem“: Es gibt für ein Intervall x_1, x_2 eine Folge $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_m \rightarrow \infty$, so daß das Gleichungssystem (A positiv definit)

$$\frac{d}{dx} \Omega y'_i - \Omega y_i + \lambda_m A_{ik}(x) y_k = 0$$

ein konjugiertes System aus $m + 1$ Punkten besitzt, deren erster x_1 , deren letzter x_2 ist.

K. Friedrichs (Braunschweig).

Gevrey, Maurice: Détermination des intégrales des systèmes d'équations linéaires aux dérivées partielles du type elliptique. C. R. Acad. Sci. Paris **193**, 693–695 (1931).

Es wird darüber berichtet, wie sich die Lösung der Randwertaufgaben des elliptischen Systems

$$\sum_{ij} a_{ij}^k \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{hi} b_{hi}^k \frac{\partial u_h}{\partial x_i} + \sum_h c_h^k u_h = f_k,$$

wo die Koeffizienten nur einer Hölder-Bedingung genügen, auf eine Integralgleichung vom Fredholmschen Typ zurückführen läßt.

K. Friedrichs (Braunschweig).

Capoulade, Jean: Sur la fonction de Green d'un domaine de révolution. Bull. Sci. math., II. s. 55, 378—393 (1931).

Die vorliegende Abhandlung ist dem Inhalte nach identisch mit einer Note des Verf. in C. R. 192, 325—326 (1931) (vgl. dies. Zbl. 1, 63) und ist eine ausführlichere Darlegung derselben. Der Verf. erweitert auf den Fall der Rotationsgebiete die Funktionaleigenschaften der Greenschen Funktion, welche für den Fall eines Zylinders von Lévy und Bouligand [s. Bouligand, Fonctions harmoniques. Principes de Picard et de Dirichlet. Mémorial des Sci. Math. 11, 26, 30, 45, 48 (1926)] festgestellt wurden. Es ist zu bemerken, daß der Fall, daß die Grenze des rotierenden Gebietes δ gemeinsame Teile mit der Rotationsachse besitzt, hier nicht wesentlich verschieden ist von dem Falle, daß die Achse außerhalb δ liegt. Das steht im engen Zusammenhang mit der Tatsache, daß die der Grenze von δ angehörenden Teile der Achse im dreidimensionalen Dirichletschen Problem die sog. ensembles impropres bilden (s. die Abhandlungen von Bouligand, referiert in dies. Zbl. 2, 134).

Janczewski (Leningrad).

Lampariello, G.: Onde elastiche nei mezzi anisotropi. Atti Accad. naz. Lincei, VI. s. 14, 265—270 (1931).

For an anisotropic medium with 3 orthogonal planes of symmetry the elastic displacements u, v, w satisfy 3 equations of type

$$\varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + h \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (H + h) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + (G + g) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \dots \quad (1)$$

In the Cauchy problem the values of u, v, w and their first derivatives are specified on the moving surface

$$\zeta(x, y, z, t) = \zeta_0. \quad (2)$$

To find the characteristics of the equations (1) the author uses 3 new functions $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ such that $\zeta, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ can be regarded as new independent variables. With these variables

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = p_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + \dots, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = p_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + \dots, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = p_2 p_3 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + \dots$$

where

$$p_0 = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad p_1 = \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad p_2 = \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad p_3 = \frac{\partial \zeta}{\partial z},$$

and the equations (1) take the form of 3 equations of type

$$(A p_1^2 + h p_2^2 + g p_3^2 - \varrho p_0^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + (H + h) p_1 p_2 \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2} + (G + g) p_1 p_3 \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} + \dots = 0.$$

The determinant of the coefficients of $\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2}$ and $\frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2}$ is a quantity $\Omega(p_0, p_1, p_2, p_3)$ which vanishes when (2) is a wave-surface or characteristic. — In the discussion of the equation $\Omega = 0$ the author observes that this equation is analogous to that which occurs in the search for the principal axes of the quadric

$$(A p_1^2 + h p_2^2 + g p_3^2) x^2 + (h p_1^2 + B p_2^2 + f p_3^2) y^2 + (g p_1^2 + f p_2^2 + C p_3^2) z^2 + 2(F + f) p_2 p_3 y z + 2(G + g) p_3 p_1 z x + 2(H + h) p_1 p_2 x y = 1.$$

Special attention is given to the case in which the coefficients of elasticity satisfy the relations

$$(F + f)^2 = (B - f)(C - f), \quad (G + g)^2 = (C - g)(A - g), \quad (H + h)^2 = (A - h)(B - h), \\ (A - h)(B - f)(C - g) = (A - g)(B - h)(C - f),$$

which are satisfied identically when the medium is isotropic. One root of the equation

$\Omega = 0$ is then $p_0 = -H = \sqrt{\frac{1}{\varrho} (A p_1^2 + B p_2^2 + C p_3^2)}$ where H is the Hamiltonian function for the associated rays (bicharacteristics). Bateman (Pasadena).

Lampariello, G.: Onde di discontinuità nei mezzi elastici più generali. Atti Accad. naz. Lincei, VI. s. 14, 338—340 (1931).

A continuation of the work described in the preceeding abstract. When the expression for the elastic energy involves 21 elastic constants the elastic displacements u, v, w satisfy 3 equations of type

$$\begin{aligned} & A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + h \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2a \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + 2e_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 2e_{13} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ & + e_{13} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + e_{23} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + c \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + (H+h) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + (a+e_{11}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + (b+e_{22}) \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} \\ & + e_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + e_{32} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (a+e_{11}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + (G+g) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + (c+e_{33}) \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} + \dots \\ & = Q \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

The characteristics are now given by an equation $\Omega(p_0, p_1, p_2, p_3) = 0$ where Ω is of the third degree in p_0 . There are thus 3 possible waves and the direction of propagation of each of them can be found by forming the related bicharacteristics.

Bateman (Pasadena).

Bouligand, Georges: Un point de technique des vibrations. C. R. Acad. Sci. Paris 194, 63—65 (1932).

Die Knotenflächen der Lösungen der Differentialgleichung $\Delta u + \omega^2 u = 0$ (ω konstant) kommen mit wachsendem ω jedem Punkte beliebig nahe. Der Beweis ergibt sich aus dem Analogon zum Mittelwertsatz bei Potentialfunktionen. Durch eine einfache Abschätzung überträgt sich der Satz auf den Fall $\Delta u + \omega^2 \cdot \varphi \cdot u = 0$, mit $\varphi \geq 1$.

Willy Feller (Kiel).

Stenzel, H., und M. J. O. Strutt: Über die Schallstrahlung einer mit Knotenlinien schwingenden Kreismembran. Ann. Physik, V. F. 12, 528 (1932).

Vgl. dies. Zbl. 2, 258.

Ghermanesco, M.: Sur les fonctions n -metaharmoniques de p variables. Atti Accad. naz. Lincei, VI. s. 14, 252—259 (1931).

Allgemeine Sätze über n -metaharmonische Funktionen von J. Pierre Robert werden mit einer anderen Beweismethode, die keinen Gebrauch von verallgemeinerten Greenschen Formeln macht, erneut bewiesen und vervollständigt. Ebenfalls werden einige Resultate von Nicolesco über metaharmonische Funktionen und harmonische Funktionen höherer Ordnung auf n -metaharmonische Funktionen ausgedehnt. Es handelt sich vor allem um Beziehungen zwischen den Mittelwerten und den Laplaceschen Iterierten solcher Funktionen.

Lüneburg (Göttingen).

Gosse, R.: Sur l'intégration d'une équation aux dérivées partielles. C. R. Acad. Sci. Paris 194, 348—349 (1932).

Zaremba, Stanislaw: Überblick über den gegenwärtigen Stand der Potentialtheorie. Math. pol. 6, 131—145 (1931) [Polnisch].

Funktionentheorie:

Riesz, Marcel: Sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions avec quelques remarques sur les géométries non-euclidiennes. Kungl. Fysiogr. Sällsk. Lund För., 1, 21 S. (1931).

Ein Kreisgebiet (Kreisinneres, Kreisäußeres, Halbebene) der komplexen Ebene und zwei darin enthaltene Punkte haben bekanntlich eine Invariante gegenüber linearen Transformationen, nämlich die kreisgeometrische Entfernung der beiden Punkte. Verf. definiert in einfacher Weise eine andere Invariante (Betrag des Doppelverhältnisses der 2 Punkte und ihrer Spiegelpunkte in bezug auf den Rand des Kreisgebietes), die sich als Quadrat des hyperbolischen Sinus der kreisgeometrischen Entfernung erweist. Statt des kreisgeometrischen Abstandes in der Pickschen invarianten

Form des Schwarzschen Lemmas kann daher auch diese Invariante verwendet werden. Die so entstehende Gestalt des Lemmas wird zu einer einfachen Herleitung der neuerdings entdeckten Grenzfälle (Julia, Carathéodory, Landau-Valiron) verwendet. — Der Satz von Carathéodory und Landau-Valiron besagt unter anderem: Für eine im Einheitskreis reguläre Funktion $w = f(z)$, für die dort $|f| < 1$ gilt, existiert (der endliche oder unendliche) $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{w - w_0}{z - z_0} = \gamma$ für $|z_0| = 1$, $|w_0| = 1$ bei Annäherung auf dem nach z_0 führenden Radius. Es wird nun die folgende von Myrberg herrührende Frage beantwortet: f genüge den genannten Voraussetzungen, und außerdem sei auf fast allen Radien $\lim |f| = 1$. Gibt es dann zu fast allen z_0 mit $|z_0| = 1$ auch w_0 mit $|w_0| = 1$ so, daß γ endlich ist? Die Frage ist zu verneinen. Verf. gibt Beispiele von solchen Funktionen, bei denen für alle z_0 und w_0 der Grenzwert γ unendlich ist. Haupthilfsmittel hierbei ist eine von F. Riesz und Herglotz herrührende Darstellung einer beliebigen, im Einheitskreis regulären Funktion mit positivem Realteil durch ein Stieltjessches Integral und ein daran anknüpfender Beweis von R. Nevanlinna für den Satz von Carathéodory und Landau-Valiron. — Die Arbeit schließt mit einigen Bemerkungen über konform-invariante Maßbestimmung in einem beliebigen einfach zusammenhängenden Gebiet. Diese Maßbestimmung kann natürlich durch konforme Abbildung aus der Poincaréschen für den Kreis erzeugt werden. Verf. gibt eine direkte Definition mit Hilfe der Abbildungsfunktion des Gebietes. Aus dem Schwarzschen Lemma läßt sich so unmittelbar das Lindelöfsche Prinzip ablesen. — Es sei noch bemerkt, daß sich der Carathéodory, Landau u. Valiron zugeschriebene Satz schon in der Note: Sur une généralisation d'un théorème de Schwarz [C. R. Acad. Sci. Paris **183**, 500–502 (1926)] von Julius Wolff findet.

W. Fenchel (Göttingen).

Julia, Gaston: Sur une décomposition des aires multiplement connexes. C. R. Acad. Sci. Paris **194**, 38–39 (1932).

Fortsetzung der früheren Untersuchungen des Verf. (vgl. dies. Zbl. **2**, 34) über die konforme Abbildung eines von einer äußeren Kurve C_0 und p inneren Kurven C_1, \dots, C_p begrenzten Gebiets A . $F(z) = e^{U+iV}$ ist die von Vallée-Poussin eingeführte Funktion; es ist $U = \lambda_k$ auf C_k ($0 = \lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_p$). — Die Zerlegung von A in Teilgebiete, definiert durch $\lambda_{k+1} < U < \lambda_k$ wird untersucht. Unter gewissen einschränkenden Bedingungen kommt der Verf. zum folgenden Ergebnis: Die Menge $\lambda_{k+1} < U < \lambda_k$ besteht aus einem oder mehreren punktfremden Gebieten. Jedes Gebiet ist nach außen von einer geschlossenen Kurve $U = \lambda_k$ und nach innen von einer oder mehreren Kurven $U = \lambda_{k+1}$ begrenzt. Auf den äußeren Randkurven, die der Verf. mit $U = \lambda_k - 0$ bezeichnet, ist V wachsend, auf den inneren Kurven $U = \lambda_{k+1} + 0$ ist V abnehmend, alles, wenn die Kurven im positiven Sinn in bezug auf das betrachtete Gebiet durchlaufen werden.

Ahlfors (Paris).

Julia, Gaston: Sur la structure des aires multiplement connexes. C. R. Acad. Sci. Paris **194**, 237–239 (1932).

Die Untersuchungen des Verf. (vgl. das vorangehende Referat) werden fortgesetzt. Die äußeren Randkurven $U = \lambda_k - 0$ können in zwei Klassen zerlegt werden. Entweder sind es (erste Klasse) geschlossene, analytische Kurven im Innern von A oder (zweite Klasse) Kurven, welche teilweise zum Rand von A gehören. Wenn z eine geschlossene Kurve $U = \lambda_k - 0$ beschreibt, so nimmt V um ein Vielfaches von 2π zu, das die Anzahl der von dieser Kurve umschlossenen Kurven C_ν ($\nu \geq k$) angibt. — Auch die Kurven $U = \lambda_k + 0$ sind von zwei Arten. Die Kurven erster Art sind geschlossene, analytische Kurven, die entweder mit den Kurven $U = \lambda_k - 0$ identisch sind oder aus mehreren Kurven dieser Art bestehen, verbunden durch Punkte, wo $F' = 0$. Es gibt nur eine Kurve $U = \lambda_k + 0$ zweiter Art, welche eine Anzahl von Eckpunkten mit rechtwinkligen Tangenten besitzt.

Ahlfors (Paris).

Grötzsch, Herbert: Das Kreisbogenschlitztheorem der konformen Abbildung schlichter Bereiche. Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig, Math.-phys. Kl. 83, 238—253 (1931).

Die vorliegende Arbeit schließt sich an die Dissertation des Verf. [Leipz. Ber. 81, 51—86 (1929)] an und löst das dort unter einschränkenden Voraussetzungen behandelte Problem: Gegeben sei ein endlich oder unendlich vielfach zusammenhängender Bereich der z -Ebene, unter dessen Randkomponenten zwei besondere R' und R'' ausgezeichnet seien. Er soll so auf die w -Ebene abgebildet werden, daß R' und R'' zwei konzentrische Kreise $|w| = \varrho'$, $|w| = \varrho''$ ($\varrho' < \varrho''$, ϱ' darf auch 0, ϱ'' auch ∞ sein) entsprechen und jede andere Randkomponente in einen Kreisbogenschlitz auf einen Kreis $|w| = \varrho$ ($\varrho' < \varrho < \varrho''$) übergeht. Es zeigt sich, daß das Problem stets lösbar ist. Um es zu einem bis auf die trivialen Substitutionen $w' = aw$ ($a \neq 0$) bestimmten zu machen, muß jedoch, wenn der allgemeinste unendlich vielfach zusammenhängende Bereich in Betracht gezogen wird, an den Bildbereich eine weitere Forderung gestellt werden. Der Verf. führt hierfür eine Extremalbedingung ein, die eng mit einer von Koebe eingeführten zusammenhängt, jedoch im Gegensatz zu dieser rein geometrisch-funktionentheoretischer Natur ist. Analoge Betrachtungen führt der Verf. in seiner Arbeit: Zum Parallelschlitztheorem der konformen Abbildung schlichter unendlich-vielfach zusammenhängender Bereiche“ durch. (Vgl. dies. Zbl. 3, 14.) K. Löwner (Prag).

Grötzsch, Herbert: Über die Verschiebung bei schlichter konformer Abbildung schlichter Bereiche. Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig, Math.-phys. Kl. 83, 254—279 (1931).

Sei B_n ein n -fach zusammenhängender Bereich der z -Ebene, der $z = \infty$ im Inneren enthält, und $w = f(z)$ eine Funktion, die ihn schlicht abbildet und deren Entwicklung im Unendlichen die Gestalt hat: $w = z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots$. Aus den Verzerrungssätzen folgt dann leicht, daß $|f(z_1) - z_1|$ für ein vorgeschriebenes $z = z_1$ aus dem Inneren von B_n eine gewisse nur von B_n und z_1 abhängige endliche Schranke nicht übersteigen kann. Der Verf. stellt und löst im Hauptteil der Arbeit das viel weitergehende Problem, den genauen Wertebereich von $f(z_1)$ zu bestimmen, falls f_1 die Gesamtheit der oben charakterisierten Funktionen durchläuft. Um die Lösung angeben zu können, müssen wir zunächst das vom Verf. bewiesene „Parabelschlitztheorem“ formulieren: Sei z_1 wieder ein vorgeschriebener Punkt von B_n . Dann gibt es genau eine wie oben normierte Abbildung von B_n auf einen von konfokalen Parabelsegmenten, mit dem Bild von z_1 als Brennpunkt, begrenzten Bereich mit vorgeschriebener Achsenrichtung. Die Achse ist etwa von der äußeren nach der inneren Seite der Parabel orientiert zu denken. Wird die Achsenrichtung gedreht, so beschreibt der Bildpunkt von z_1 einen Kreis $K(z_1)$. — Die Lösung der oben gestellten Frage lautet: Der gesuchte Wertebereich ist die von $K(z_1)$ begrenzte abgeschlossene Kreisscheibe. Zu jedem inneren Punkt derselben gehören unendlich viele Abbildungen, zu einem Randpunkt nur die im Parabelschlitztheorem auftretende Abbildung. Es wird hierauf ein analoger Satz aufgestellt für einen auf dem Rande von B_n liegenden Punkt z_1 , der den bekannten Satz $|f(z_1)| \leq 2$ für einfach zusammenhängende Bereiche umfaßt und ihn verschärft. K. Löwner (Prag).

Julia, Gaston: Sur la représentation conforme des aires multiplement connexes. (I. mem.) Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. e mat., II. s. 1, 113—138 (1932).

This paper is concerned with the conformal mappings of domains \mathfrak{A} situated in the complex z -plane and bounded by $p + 1$ Jordan curves C_0, C_1, \dots, C_p , where $p \geq 1$ and where C_0 denotes the boundary curve which comprises all the other boundary curves in its interior. It can be supposed that the boundary curves are analytic. Two domains of this type, with the same number of boundary curves, generally cannot be mapped upon each other in a one-to-one and conformal way. On the other hand, there exists a large literature concerning the conformal mappings of such domains upon certain types of canonical domains (bounded by circles, by straight segments,

and so on). The author studies conformal mappings upon canonical domains discussed recently by De la Vallée Poussin. Denote by U_k ($k = 1, \dots, p$) the harmonic function equal to 1 on C_k and equal to zero on all the other boundary curves. The conjugate harmonic function V_k is then not single-valued in \mathfrak{A} . Let ω_{kj} be the period of V_k relative to C_j . The determinant $|\omega_{kj}|$ is then different from zero. Therefore there exist real numbers $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ such that $\sum \lambda_k \omega_{kj} = -2\pi$. These numbers λ are unique and they are negative. Consider the harmonic function $U = \sum \lambda_k U_k$. The period of the conjugate harmonic function V relative to C_j ($j = 1, \dots, p$) is then -2π , and the period relative to C_0 is $2p\pi$. Put $F(z) = e^{\mathcal{U} + iV}$. Then $F(z)$ is single-valued in \mathfrak{A} . The absolute value of $F(z)$ is constant on each one of the boundary curves. The argument of $F(z)$ increases by $2p\pi$ on C_0 and decreases by 2π on C_j ($j = 1, \dots, p$). If a denotes the number of the zeros of $F'(z)$ interior to \mathfrak{A} and b the number of the zeros of $F'(z)$ situated on the boundary of \mathfrak{A} , then $2a + b = 2p - 2$. Put $\xi = F(z)$. Then \mathfrak{A} is mapped upon a Riemann surface σ spread out above the ξ -plane. The preceding analytic statements concerning $F(z)$ and $F'(z)$ give geometrical properties of σ which are shown to be characteristic for Riemann surfaces obtainable in the manner described above from a domain \mathfrak{A} . The particular case when $F'(z)$ has no zeros on the boundary of \mathfrak{A} is then studied more thoroughly. In this case, C_1, \dots, C_p are carried, by $\xi = F(z)$, into simply covered circles $\gamma_1, \dots, \gamma_p$ and C_0 is carried into the p -times covered unit circle γ_0 . Adding to σ the interiors of $\gamma_1, \dots, \gamma_p$ and the p -times covered exterior (with branch-point at $\xi = \infty$) of γ_0 , a Riemann surface Σ_1 is obtained which is equivalent to the closed plane (that is to say, to the finite plane plus the point at infinity). Mapping Σ_1 upon the closed plane of a complex variable u , by a function $u = \psi(\xi)$, the inverse function $\xi = P(u)$ is a polynomial of degree p . The original domain \mathfrak{A} has been mapped this way in a one-to-one and conformal manner upon a domain bounded by analytic Jordan curves, upon each of which the absolute value of the polynomial $P(u)$ is constant. That is to say, the image domain is bounded by Cassinian curves. The polynomial $P(u)$ is shown to be unique, except for trivial linear transformations of the form $u^* = au + b$. A second type of canonical maps is obtained by adding to σ , instead of the p -times covered exterior of γ_0 , the reflection upon γ_0 of the surface obtained by adding to σ the interiors of $\gamma_1, \dots, \gamma_p$. The map of the resulting Riemann surface Σ_2 upon the closed u -plane gives then for \mathfrak{A} a canonical map where the boundary curves are generalized Cassinian curves, that is to say curves upon which the absolute value of a rational function of u is constant. Canonical maps in the general case when $F'(z)$ has zeros on the boundary of \mathfrak{A} will be discussed in a subsequent paper of the author. Tibor Radó (Columbus, Ohio).

Beatty, S.: A note on schlicht functions. Trans. Roy. Soc. Canada III Math. Sci., III. s. 25, 83—85 (1931).

Es wird eine Abschätzung für die Koeffizienten des Quadrats einer schlicht abbildenden Potenzreihe angegeben, also für $\sum_{\nu=1}^n a_\nu a_{n+1-\nu}$; sie ergibt sich elementar aus der Cauchyschen Integralformel und dem Bieberbachschen Flächensatz und ist für diese Koeffizienten etwas schärfer als die aus den Littlewoodschen Schranken $|a_n| < en$ folgende Abschätzung. Ulrich (Marburg, Lahn).

Bernstein, Vladimir: Sur l'analogie entre la distribution des droites de Julia des fonctions holomorphes et celle des points singuliers des fonctions analytiques. C. R. Acad. Sci. Paris 194, 350—353 (1932).

Une fonction entière $F(z) = \sum a_n z^n$ d'ordre un et de type moyen étant donnée l'auteur lui attache h polygone de sommabilité B de M. Borel relatif à $\varphi(x) = \sum n! a_n x^n$, ainsi que le diagramme indicateur J de M. Pólya relatif à $f(x) = \sum \frac{n! a_n}{x^{n+1}}$. L'auteur émet l'hypothèse suivante: les rayons vecteurs des points extrêmes de B , on ceux

du podaires de l'origine par rapport aux tangentes de J déterminent les droites J de $F(z)$. En se basant sur quelques théorèmes de M. Haar [Math. Ann. **96**, 69 (1927)] l'auteur démontre quelques cas particuliers du fait signalé: A et B étant les points extrêmes d'un segment rectiligne faisant partie du contour de J , supposons qu'à l'extérieur de J et au voisinage de A on ait

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^k (x-A)^{-\alpha_\nu} [\alpha_\nu \log(x-A) + b_\nu] + g(x) \quad (b_\nu = 0, \text{ si } \alpha_\nu \text{ est entier } < 0)$$

où $g(x)$ est une fonction continue sur chaque droite d'appui non tangente à J qui passe par A ; supposons que des conditions analogues aient lieu pour B , — dans ces conditions le rayon vecteur perpendiculaire à AB détermine une droite J . On peut remplacer k par ∞ , en imposant aux coefficients des conditions convenablement droisées. S étant un arc du contour de I sans points anguleux, supposons qu'au voisinage de S et à l'extérieur de J on ait

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{x-e_n} + g(x)$$

où $\sum |\zeta_u|$ converge, l'ensemble des C_n étant partout dense sur chaque arc non rectiligne de S , et où $g(x)$ est continue sur chaque droite d'appui tangente à I en un C_n . Dans ces conditions chaque rayon vecteur perpendiculaire à une tangente de S détermine une droite J . Les démonstrations ne sont pas données. *Mandelbrojt.*

Valiron, Georges: Sur les directions de Borel des fonctions méromorphes d'ordre fini. J. de Math., IX. s. **10**, 457—480 (1931).

Für die z -Stellen z_1, z_2, \dots einer meromorphen Funktion $f(x)$, welche einem gewissen Winkelraum angehören, werde die Reihe $\sum |z_\nu|^{-\varrho}$ gebildet; divergiert sie, so heiße ϱ Divergenzexponent. Zunächst wird in Vereinfachung des Beweises von Frl. Collier in ihrer Straßburger Dissertation der Satz bewiesen: Sei B ein Winkelraum breiter als π/ϱ , und sei ϱ für einen gewissen Teilwinkelraum von B und eine Stellensorte Divergenzexponent, dann gibt es in B eine Borelsche Divergenzrichtung $\varphi = \varphi_0$ zu ϱ , d. h. die obige Reihe divergiert für jeden noch so schmalen Winkelraum um φ_0 und für alle Stellensorten bis auf höchstens zwei Ausnahmen. Zum Beweise dient ein bereits vielfach benutztes Theorem von Schottkyschem Typ, das z. B. in diesem Zbl. **1**, 397 bereits besprochen ist. Zweitens wird für ganze Funktionen die Lagebeziehung zwischen solchen Divergenzrichtungen zu ϱ und den Richtungen studiert, wo die Strahlordnung (vgl. dies. Zbl. **2**, 402) zur Divergenzklasse der Ordnung ϱ gehört, wo

also das Integral $\int_0^r r^{-\varrho-1} \log |f(re^{i\varphi})| dr$ für $r \rightarrow \infty$ divergiert. In einem letzten Abschnitt werden solche Integrale für verschiedene φ auf ihr Wachstum in Abhängigkeit von der oberen Grenze untersucht; die Ergebnisse hängen mit der klassischen Arbeit von Phragmén-Lindelöf (Acta math. **31**) und mit denen der obengenannten Valironschen Note zusammen. *Ullrich* (Marburg, Lahn).

Montel, Paul: Sur les fonctions harmoniques qui admettent des valeurs exceptionnelles. C. R. Acad. Sci. Paris **194**, 40—41 (1932).

Potentialfunktionen, die auf einem Bereich einen Wert auslassen, bilden eine Normalfamilie. Auf Grund dieser Bemerkung lassen sich für Potentialfunktionen Sätze gewinnen, welche den einfachsten Aussagen über die Wertverteilung analytischer Funktionen entsprechen; so werden in dieser Note Analoga des Picardschen, des Picard-Landauschen und des Picard-Juliaschen Satzes angegeben. *Ullrich* (Marburg).

Thullen, Peter: Zur Theorie der Singularitäten der Funktionen zweier komplexen Veränderlichen. Die Regularitätshüllen. Math. Annalen **106**, 64—76 (1932).

Définition: Dans l'espace de deux variables complexes x et y , un domaine D sera dit domaine d'holomorphie (Regularitätsbereich) s'il existe une fonction

$f(x, y)$, holomorphe et uniforme dans D , et telle que f ne soit holomorphe et uniforme dans aucun domaine contenant D et différent de D . — On sait (Hartogs et E. E. Levi) que les domaines ne sont pas tous des domaines d'holomorphie. P. Thullen démontre le théorème fondamental: à chaque domaine D est associé un domaine d'holomorphie \mathbf{D} qui contient D et est tel que toute fonction holomorphe et uniforme dans D soit aussi holomorphe et uniforme dans \mathbf{D} ; \mathbf{D} est unique et se nomme la „Regularitätshülle“ du domaine D (domaine d'holomorphie associé à D). Ce théorème vaut pour tout domaine D , univalent ou non, pourvu que D n'admette aucune variété de ramification intérieure. L'auteur donne l'exemple d'un domaine univalent D tel que \mathbf{D} ne soit pas univalent. — Le théorème fondamental a pour conséquences: 1. Si $f(x, y) \neq a$ dans D , alors $f(x, y) \neq a$ dans \mathbf{D} ; si $|f(x, y)| < M$ dans D , alors $|f(x, y)| < M$ dans \mathbf{D} . (Corollaire: si les fonctions d'une famille F ont leurs modules inférieurs à M dans un domaine D , et si F n'est normale [au sens de Montel] dans aucun domaine contenant D et différent de D , alors D est un domaine d'holomorphie.) — 2. Si une transformation

$$x' = f(x, y), \quad y' = g(x, y) \quad \left(f \text{ et } g \text{ holomorphes, } \frac{d(f, g)}{d(x, y)} \neq 0 \right) \quad (1)$$

transforme D en D' , elle transforme \mathbf{D} en \mathbf{D}' ; cas particulier: $D \equiv D'$. D'où un procédé de construction de domaines rigides, c'est-à-dire n'admettant aucune transformation en eux-mêmes de la forme (1) (sauf la transformation identique). — Le théorème fondamental se ramène au suivant: le domaine commun à des domaines d'holomorphie en nombre fini ou infini est un domaine d'holomorphie. Corollaire: pour que D borné et univalent soit un domaine d'holomorphie, il faut et il suffit qu'à chaque point frontière M de D on puisse associer une $f(x, y)$ holomorphe dans D et non holomorphe en M . — Pour terminer, l'auteur étudie plus particulièrement la nature des domaines d'holomorphie associés aux domaines cerclés et aux domaines analogues.

Henri Cartan (Strasbourg).

Fantappiè, Luigi: I funzionali delle funzioni di due variabili. Mem. Accad. Ital. Roma, Cl. Sci. fis. ecc. 2, Mat.: Nr 4, 1—172 (1931).

Si à tout $y(t_1 t_2)$ d'un champ correspond un nombre f on écrit $f = F[y(t_1 t_2)]$ [fonctionnelle de $y(t_1 t_2)$]. Si f dépend aussi de z_i ($i = 1, \dots, m$), la fonctionnelle est dite mixte, on écrit $F[y(t_1 t_2); z_1 z_2 \dots z_m]$. Si $y = y(t_1 t_2; \alpha, \beta, \dots)$ (α, β, \dots paramètres) on écrit $F_{t_1 t_2}[y(t_1 t_2; \alpha, \beta, \dots)] = f(\alpha, \beta, \dots)$. On suppose y analytique et $F[y(t_1 t_2); z_1 \dots z_m]$ analytique des z_i lorsque y est fixe. Le couple xy à l'infini est dit régulier pour $f(xy)$ lorsque $f\left(\frac{1}{y'}, \frac{x'}{y'}\right)$ ou $f\left(\frac{x'}{y'}, \frac{1}{y'}\right)$ est holomorphe pour $x'y'$, ce point étant, au moins, un zéro simple. On fera souvent correspondre au plan $xy(x = x' + ix'', y = y' + iy'')$ une variété V_i^4 de Segre dont les coordonnées ξ_i sont données par $\xi_i = \frac{m_i}{1 + |x|^2 + |y|^2}$ où: $m_1 = x'$, $m_2 = x''$, $m_3 = y'$, $m_4 = y''$, $m_5 = x'^2 + x''^2$, $m_6 = y'^2 + y''^2$, $m_7 = x'y' + x''y''$, $m_8 = x'y' - x''y''$. On appelle entourage (r) de (\bar{x}, \bar{y}) l'ensemble des (xy) tels, qu'en désignant par $\bar{\xi}_i$ et ξ_i les coordonnées de Segre correspondantes, on ait

$$\sqrt{\sum_{i=1}^8 (\xi_i - \bar{\xi}_i)^2} < r. \quad (1)$$

Si l'on ne considère que les ξ_i et $\bar{\xi}_i$ correspondant aux (xy) et $(\bar{x}\bar{y})$ d'une variété V on définit par (1) un (r) de $(\bar{x}\bar{y})$ dans $V \cdot V_s$ étant la variété des singularités de $f_0(xy)$, soit $A(r)$ l'ensemble complémentaire de (r) de $V_s \cdot (r)$ de $f_0(xy)$ est l'ensemble des $f(xy)$ régulières en $A(r)$. Le sous-ensemble de ces $f(xy)$ pour lesquelles $|f(xy) - f_0(xy)| < \sigma$ constitue un (r, σ) de $f_0(xy)$. On appelle variété analytique V_n l'ensemble $f(xy; \alpha_1, \dots, \alpha_n) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, la dernière fonction étant analytique. $f_0(xy) = f(xy; \alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0)$ est exceptionnelle pour V_n si un (r, σ) de f_0 ne contient pas de $f(xy; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ avec des α_i arbitrairement voisins des α_i^0 . Si les (r_i, σ_i) des $f[xy; \alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)]$ [$\alpha_i(t)$ continue dans $t_0 \leq t \leq t_1$] appartiennent à H on dit qu'on passe de $f_0 = f[xy; \alpha_1(t_0), \dots, \alpha_n(t_0)]$ à $f_1 = f[xy; \alpha_1(t_1), \dots, \alpha_n(t_1)]$ le long d'une courbe L de V_n . Soit $F[y(t_1 t_2)]$ définie dans un (r, σ) de $y_0(t_1 t_2)$ et considérons les $V_n[y = y(t_1 t_2; \alpha_1, \dots, \alpha_n)]$ qui pénètrent dans (r, σ) , si quelque soit V_n , $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = F_{t_1 t_2}[y(t_1 t_2; \alpha_1, \dots, \alpha_n)]$ est holomorphe dans la région Ω des α_i (les y correspondant pénétrant dans (r, σ)) on dit que F est régulière dans (r, σ) de $y_0(t_1 t_2)$. On définit alors

facilement le prolongement analytique de F , en partant d'un (r, σ) de y_0 faisant partie d'une région H où F est analytique. Lorsque le prolongement fournit la même F quelque soit le y de H de l'entourage duquel on part, F est analytique au sens strict. H est linéaire si y_1 et y_2 lui appartenant $ay_1 + by_2$ lui appartient aussi. F (analytique dans H linéaire) est linéaire si $F[y_1 + y_2] = F[y_1] + F[y_2]$. On s'occupera des F linéaires.

$v(\alpha, \beta) = F_{t_1 t_2} \left[\frac{1}{(t_1 - \alpha)(t_2 - \beta)} \right]$ est l'indicatrice (mi-symétrique) de F . $\omega(\alpha, \beta) = \frac{1}{\alpha\beta} v\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}\right)$ est son indicatrice symétrique. La formule

$$F[y(t_1 t_2)] = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{c_1} dt_1 \int_{c_2} v(t_1 t_2) y(t_1 t_2) dt_2, \quad (c_1 \text{ et } c_2 \text{ sont deux cercles conv. choisis}) \quad (2)$$

permet de calculer F dans un (r) des polynômes, lorsqu'on connaît $v(\alpha, \beta)$. Si $\omega(\alpha, \beta) = \sum \xi_{rs} \alpha^r \beta^s$ et $y(t_1 t_2) = \sum a_{rs} t_1^r t_2^s$ on a d'après (2): $F[y(t_1 t_2)] = \sum \xi_{rs} a_{rs}$. La fonctionnelle $N[t_1^r t_2^s; z_1 z_2] = \xi_{rs} z_1^r z_2^s$ est dite normale. ω d'une F normale est fonction de αz_1 et βz_2 .

L'indicatrice projective $p(\alpha, \beta) = F_{t_1 t_2} \left[\frac{1}{1 - \alpha t_1 - \beta t_2} \right]$ est plus appropriée pour exprimer F dans son domaine d'existence. D'ailleurs on peut prolonger un F analytique au sens strict suivant une courbe L en se basant sur (2). Il suffit de transformer d'une manière continue c_1 et c_2 . Citons l'application suivante (généralisation du théorème de composition des singularités de M. Hadamard) des résultats concernant les F mixtes normales: $f(z_1 z_2) = \sum \xi_{rs} a_{rs} z_1^r z_2^s$ n'a pas d'autres couples singuliers $z_1 z_2$ que ceux vérifiant les équations:

$$s(t_1, t_2) = 0, \quad \sigma\left(\frac{z_1}{t_1}, \frac{z_2}{t_2}\right) = 0, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial s}{\partial t_1} & \frac{\partial s}{\partial t_2} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial t_1} \left(\frac{z_1}{t_1}, \frac{z_2}{t_2}\right) & \frac{\partial \sigma}{\partial t_2} \left(\frac{z_1}{t_1}, \frac{z_2}{t_2}\right) \end{vmatrix} = 0 \quad \text{entre lesquelles on élimine } t_1 \text{ et } t_2$$

t_2 , $s(z_1, z_2) = 0$, $\sigma(t_1 t_2) = 0$ désignant respectivement des courbes analytiques sur lesquelles $\sum \xi_{rs} z_1^r z_2^s$ et $\sum a_{rs} t_1^r t_2^s$ sont singulières. Quelques chapitres sont consacrés aux F non linéaires. Mandelbrojt (Clermont-Ferrand).

Siegel, C.L.: Über die Perioden elliptischer Funktionen. J. f. Math. **167**, 62–69 (1932).

L'auteur a démontré un théorème remarquable sur les périodes des fonctions elliptiques. — Soit g_1 et g_2 des coefficients de l'équation différentielle de la fonction elliptique $\wp(x)$

$$\left[\frac{d\wp(x)}{dx} \right]^2 = 4\wp^3(x) - g_1\wp(x) - g_2.$$

Quand les nombres g_1 et g_2 sont des nombres algébriques, l'une au moins des périodes ω_1 et ω_2 de la fonction doublement périodique $\wp(x)$ est un nombre transcendant.

Particulièrement, l'intégrale $\int_{-1}^{+1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ est un nombre transcendant. La démonstration

en est basée sur la contradiction que nous pouvons déduire de la décroissance et des propriétés arithmétiques des coefficients de développement de $\wp(x) \cdot Q(x)$, $[Q(x) = (x - \zeta_1)^2 \dots (x - \zeta_r)^2 \text{ où } \zeta_i = p\omega_1 + q\omega_2, p \text{ et } q \text{ sont des nombres entiers}]$ en série d'interpolation de Newton

$$\wp(x) Q(x) = \sum_{\substack{0 \leq l \leq n \\ 1 \leq s \leq r-1}} A_{ls} (x - \zeta_1)^s \dots (x - \zeta_l)^r (x - \zeta_{l+1})^{s-1} + R_n(x)$$

si nous supposons, que tous les nombres $\omega_1, \omega_2, g_1, g_2$ sont des nombres algébriques. —

L'autre résultat de ce travail est le suivant: parmi les $\left[\frac{n-1}{2} \right]$ nombres, $n \geq 3$,

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1}}{\sqrt{1-x^n}} dx \quad \left(m = 1, 2, \dots, \left[\frac{n-1}{2} \right] \right)$$

un au moins est transcendant. C'est-à-dire un au moins parmi les $\left[\frac{n-1}{2} \right]$ intégrales abéliennes linéairement indépendantes

$$\int \frac{x^{m-1}}{\sqrt{1-x^n}} dx \quad \left(m = 1, 2, \dots, \left[\frac{n-1}{2} \right] \right)$$

a les périodes transcendentes.

A. Gelfond (Moskau).

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Versicherungsmathematik:

De Finetti, Bruno: Le leggi differenziali e la rinuncia al determinismo. Rend. Semin. mat. Roma, II. s. 7, 63—74 (1931).

Die gegenwärtigen prinzipiellen Verhältnisse in der theoretischen Physik veranlassen den Mathematiker, eine neue Theorie für den zeitlichen Verlauf der Naturvorgänge aufzubauen, die von den Voraussetzungen der Determiniertheit dieser Vorgänge frei wäre und nur die statistischen Gesetzmäßigkeiten strengen Verlaufsregeln unterwerfen sollte. Eine solche Theorie könnte man mit gleichem Erfolg auf die Naturvorgänge anwenden, unabhängig von dem erkenntnistheoretischen Standpunkt, d. h. unabhängig davon, ob wir den Indeterminismus der Erscheinungen der Natur selber oder nur unserer ungenügenden Kenntnis zuschreiben wollten. Das Programm einer solchen Theorie wird entworfen. Als Hauptaufgabe tritt die Bestimmung des Verteilungsgesetzes einer Größe zu einem beliebigen Zeitpunkt auf. Die Methode der charakteristischen Funktionen erlaubt es, einen zweckmäßigen Begriff des „derivierten Verteilungsgesetzes“ einzuführen, mit dessen Hilfe dann für die charakteristische Funktion des momentanen Verteilungsgesetzes im allgemeinen Fall ein System von zwei Integralgleichungen aufgestellt werden kann.

A. Khintchine (Moskau).

Schelling, Hermann von: Note über den Zusammenhang von dynamischer und statistischer Gesetzlichkeit. Z. Physik 74, 140—142 (1932).

Die Zustandsgrößen F eines abgeschlossenen physikalischen Systems sind, bei Annahme von Nahwirkungsgesetzen, eindeutige Funktionen der Zeit und einer endlichen Zahl von Parametern A_1, \dots, A_m . Im nicht abgeschlossenen System mögen außerdem noch abzählbar viele Nebenparameter a_i hinzukommen, so daß eine neue Behandlungsweise erforderlich wird. Verf. skizziert ein Verfahren, das unter bestimmten Voraussetzungen auf (höchstens abzählbar viele) Zahlen λ_i und w_i führt ($\sum_i w_i = 1$). Deren physikalische Bedeutung soll die folgende sein: w_i ist die

Wahrscheinlichkeit, mit der, bei häufiger Wiederholung des zugrunde gelegten physikalischen Vorgangs, der Wert λ_i von der Zustandsgröße F angenommen wird. Existiert nur ein einziger Wert λ , so liegt dynamische Gesetzlichkeit, andernfalls statistische Gesetzlichkeit vor.

V. Bargmann (Berlin).

De Finetti, B.: Le funzioni caratteristiche di legge istantanea dotate di valori eccezionali. Atti Accad. naz. Lincei, VI. s. 14, 259—265 (1931).

Anschließend an seine früheren Publikationen betrachtet Verf. eine mit der Zeit t sich ändernde zufällige Variable $X(t)$. Man setzt voraus, daß das Verteilungsgesetz $\Phi_A(x)$ der Differenz $\Delta X = X(t_1) - X(t_0)$ nur von $\Delta = t_1 - t_0$ und nicht von $X(t_0)$ und $X(t)$, $t < t_0$, abhängt. Es wurde vom Verf. früher bewiesen, daß jede unter diesen Bedingungen zulässige charakteristische Funktion $\psi_A(y) = \int \exp(ixy) d\Phi_A(x)$ entweder die Form

$$\psi_A(y) = \exp\{p\Delta(\chi(y) - 1)\} \quad (1)$$

hat oder als Limes von solchen Funktionen darstellbar ist, wobei $\chi(y)$ auch eine charakteristische Funktion bezeichnet. Es wird jetzt gezeigt, daß $\psi_A(y)$ dann und nur dann die Form (1) hat, wenn $\Phi_A(+0) - \Phi_A(-0) > 0$ ist. Eine andere notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist $\frac{1}{t} \log \psi_A(y) \rightarrow 0$, $y \rightarrow \infty$. Weiter ist $\psi_A(y)$ dann und nur dann von der Form $\exp\{p\Delta(\chi(y) - 1) + ik y\}$, wenn $\frac{1}{t} \log \psi_A(y)$ mit $y \rightarrow \infty$ gegen ik strebt.

A. Kolmogoroff (Moskau).

Leavens, Dickson H.: Frequency distributions corresponding to time series. J. Amer. Statist. Assoc., N. s. 26, 407—415 (1931).

Es sei $x = f(t)$ das Gesetz der Abhängigkeit einer Größe x von der Zeit t , wo f eine in einem gewissen Intervalle T zu- oder abnehmende Funktion ist. Sei ferner

$\varphi[f(t)] = t$. Dann wird die Ableitung von $\varphi(x)$ nach x nichts anderes als die Häufigkeitsverteilung der Größe x im Zeitintervalle T . Der Verf. gibt einige Anwendungen dieser Tatsache auf die Berechnung von Fehlerquadraten der einfachsten zeitlichen Reihen.

V. Glivenko (Moskau).

Schmehl, H.: Würfelspiel und Fehlergesetz. Z. Vermessgswes. **61**, 81—95 (1932).

Unter $w_{i,a}$ versteht Verf. die Wahrscheinlichkeit, mit i Würfeln die Augenzahl a zu werfen. Er stellt diese Zahlen in einem „Würfeldreieck“ auf, eine Aufstellung, die der Pascalschen Dreieckaufstellung der Binomialkoeffizienten analog ist und die zur Aufstellung einer Rekursionsformel, ganz analog der bei den Binomialkoeffizienten gültigen Rekursionsformel, Anlaß gibt. Nach einer expliziten Formel und einer graphischen Darstellung der $w_{i,a}$ folgt dann der Grenzübergang $i \rightarrow \infty$, wodurch das Gauss'sche Fehlergesetz hervorgeht. Schließlich wird gezeigt, wie man die Tafel des Gauss'schen Fehlergesetzes anwenden kann, um Annäherungen an den Wert eines $w_{i,a}$ (für gegebenen i und a) zu finden — die explizite Formel ist nämlich etwas schwer verwendbar. Auch die Genauigkeit der Annäherungen wird untersucht.

Burrau (Kopenhagen).

Qvale, Paul: Remarque sur les semi-invariants de Thiele. C. R. Acad. Sci. Paris **194**, 150—152 (1932).

Für die Halbinvarianten, λ_r , einer Verteilung $f(x_i)$ der Variable x_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) hat Thiele die elegante Darstellung gegeben:

$$e^{\lambda_0 + \lambda_1 \cdot \frac{t}{1!} + \lambda_2 \cdot \frac{t^2}{2!} + \dots} = \sum_{i=0}^n e^{x_i t} f(x_i),$$

die als eine Identität in t aufzufassen ist und dadurch die Definition der λ_r liefert. Für die „typische“ (Gauss'sche) Verteilung verschwinden die λ_r von $r = 3$ ab. R. Frisch hat [C. R. Acad. Sci. Paris **181**, 274 (1925)] bewiesen, daß für die binomiale Verteilung $f(x) = \binom{x}{x} p^x (1-p)^{x-x}$, wo $x = 0, 1, 2, \dots, x$ ist, die Halbinvarianten durch die Rekursionsformel: $\lambda_r = p \cdot q \cdot \partial \lambda_{r-1} / \partial p$ gegeben werden. Der Verf. gibt nun eine Verallgemeinerung dieser Rekursionsformel, enthaltend sowohl die binomiale, die Poissonsche, die Pascalsche und die neulich [Skand. Aktuarietidskr. **14**, 43—48 (1931); vgl. dies. Zbl. **1**, 217] von Guldberg vorgeschlagene. Die allgemeine Form der Funktion $f(x_i)$, für welche eine solche Rekursionsformel möglich ist, wird vom Verf. folgenderweise aufgestellt: $f(x_i, a, b, \dots) = \Phi_1(x_i, b, \dots) \cdot \Phi_2(a, b, \dots) \cdot [\Phi_3(a, b, \dots)]^x$, wo die Φ willkürliche Funktionen sind.

Burrau (Kopenhagen).

Johansen, Paul: Über osculierende Interpolation. Skand. Aktuarietidskr. **14**, 231—237 (1931).

Im Anschluß an eine Markoffsche Problemstellung gibt Verf. eine explizite Formel für das Polynom niedrigsten Grades an, welches in n gegebenen Punkten gegebene Werte annimmt und dessen Ableitungen bis zu einer gewissen Ordnung (die von Punkt zu Punkt noch beliebig variieren darf) in denselben n Punkten auch vorgegebene Werte erhalten. Der Fehler bei der Interpolation mittels solcher Polynome wird abgeschätzt. Zum Schluß wird erklärt, daß die von Zemplen und Montel gegebenen Lösungen derselben Aufgabe falsche Ergebnisse enthalten.

A. Khintchine (Moskau).

Schulz, Günther: Über Markoffsche Ketten. (Ges. f. angew. Math. u. Mech., Bad Elster, Sitzg. v. 13.—18. IX. 1931.) Z. angew. Math. u. Mech. **11**, 444 (1931).

Kurzer Bericht über einen neuen Beweis des Markoffschen Satzes betreffend „verkettete“ Ziehungen aus einer Urnengruppe. Verf. behauptet, auch dann eine Gaußsche Limesverteilung erhalten zu haben, wenn die bei Markoff auftretenden Einschränkungen nicht erfüllt sind.

A. Khintchine (Moskau).

Meidell, Birger: Die wahrscheinliche Lebensdauer und die Sterblichkeitsmessung. Skand. Aktuarietidskr. 14, 217—230 (1931).

Das Ziel der vorliegenden Untersuchung ist die Ermittlung einer Absterbeordnung, für welche die durchschnittliche (\bar{e}_x) und eine verallgemeinerte wahrscheinliche ($l_{x+\frac{1}{\lambda}} = \frac{1}{\lambda} l_x$) Lebensdauer identisch werden. Von dem Ansatz

$$l\left(x + \frac{1}{l(x)} \int_x^\infty l(x) dx\right) = \frac{1}{\lambda} l(x)$$

gelangt man nach einfachen Umformungen zur Funktionalgleichung

$$\dot{e}'(x + \dot{e}(x)) = \frac{1}{\dot{e}(x)} \dot{e}(x + \dot{e}(x)) - 1.$$

Nach einer Reihe geschickter Transformationen wird die Lösung des Problems auf die Lösung der Funktionalgleichung $\Phi'(x+c) = \Phi(x+c) - \Phi(x)$ zurückgeführt, deren Erledigung durch den bekannten symbolischen Kalkül erfolgt:

$$\Phi(x) = A_0 + A_1 e^{\alpha_1 x} + \sum_{v=2}^{\infty} e^{\alpha_v x} (A_v \cos \beta_v x + B_v \sin \beta_v x).$$

Die Beachtung einer Reihe von Nebenbedingungen, denen eine Absterbeordnung genügen muß, führt zu einer bedeutenden Einengung der aus der allgemeinen Lösung folgenden Funktionen $l(x)$; man gelangt zur Formel

$$l_{x_0+t}/l_{x_0} = (\omega - x_0 - t)^r (\omega - x_0)^{-r}.$$

Meidell bemerkt noch, daß diese Absterbeordnung nicht für normale Leben in Frage kommt.

F. Knoll (Wien).

Mises, R. v.: Altersschichtung und Bevölkerungszahl in Deutschland. (Inst. f. angew. Math., Univ. Berlin.) Naturwiss. 1932, 59—62.

Der Verf. berichtet über eine Arbeit von F. Bonz und F. Hilburg, die schon in dies. Zbl. 2, 202 referiert wurde. Insbesondere setzt er sich mit den Arbeiten H. Burgdörfers über denselben Gegenstand auseinander.

v. Behr (Berlin).

Mosè, Jacob: Sul calcolo dei premi per rischi tarati. Giorn. Ist. ital. Attuari 3, 1—6 (1932).

L'A. dimostra, in base alla scomposizione in premio di rischio e di risparmio, che nell'assicurazione mista a premio costante per rischi tarati il premio aumenta linearmente col saggio di sopramortalità.

Autoreferat.

Numerische und graphische Methoden.

Milne-Thomson, L. M.: Ten-figure table of the complete elliptic integrals K, K', E, E' , and a table of $\frac{1}{\mathfrak{F}_3^2(0/r)}, \frac{1}{\mathfrak{F}_3^2(0/r')}$. Proc. London Math. Soc., II. s. 33, 160—164 (1931).

Die Tafeln geben zehnstellige Werte der in der Überschrift genannten Größen als Funktionen von $m = k^2$, wo k der Legendresche Modul ist. Die Argumentwerte m schreiten nach Hundertsteln fort von 0,00 bis zu 1,00. Außer den Funktionswerten sind die ersten Differenzen tabuliert. Die Texteinleitung gibt Auskunft über die bei der Berechnung der Tafeln benutzten Formeln.

Bessel-Hagen (Bonn).

Bush, V., and S. H. Caldwell: Thomas-Fermi equation solution by the differential analyzer. (Massachusetts Inst. of Technol., Cambridge [U. S. A.].) Physic. Rev., II. s. 38, 1898—1902 (1931).

Mit der im Journ. Franklin Inst. 242 (1931), S. 447 (dies. Zbl. 3, 65) beschriebenen Maschine zur Auflösung von Differentialgleichungen wurde die Thomas-Fermische Gleichung $d^2\Phi/dx^2 = \Phi^{3/2}/x^{1/2}$ mit den Grenzbedingungen $\Phi(0) = 1$ und $\Phi(\infty) = 0$ behandelt. Zur Lösung mußte die Gleichung für verschiedene Bereiche von x durch

Einführung neuer Veränderlicher umgeformt werden, die Schaltbilder zur Einrichtung des Differentialanalysators für die Auswertung sind angegeben. Die auf vier Dezimalen berechneten Werte für $x = 0$ bis $x = 36,92$ sind in einer Tabelle zusammengestellt. Zur Kontrolle wurde die bei den Umformungen nicht benutzte Beziehung

$\int_0^{\infty} \Phi^{3/2} x^{1/2} dx = 1$ ebenfalls mit der Maschine ausgewertet, für Werte $x = 0$ bis $x = 30$ ergab sich für das Integral der Wert 0,994. Koehler (Darmstadt).

Holzer, L.: Über nomographische Auflösung von Differentialgleichungen. (Ges. f. angew. Math. u. Mech., Bad Elster, Sitzg. v. 13.—18. IX. 1931.) Z. angew. Math. u. Mech. **11**, 443—444 (1931).

Cook, W. R.: On curve-fitting by means of least squares. Philosophic. Mag., VII. s. 12, 1025—1039 (1931).

W. E. Deming lieferte im Philosophic. Mag., VII. s. 11, 146 (vgl. dies. Zbl. 1, 150) einen Beitrag zur Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf das Problem der Kurvenbestimmung für den Fall, daß Fehler in mehr als einer Variablen auftreten. Das gleiche Verfahren wurde im Research Department, Woolwich, auf zwei Variable angewendet. Es wurde dabei notwendig, die Fehler zu untersuchen, die in den Parametern der Bedingungsgleichungen zwischen den Variablen auftreten. Verf. gibt die Ergebnisse dieser Untersuchung. Sie sind denjenigen Ergebnissen ähnlich, die erzielt werden, wenn nur eine Variable als fehlerhaft angenommen wird. Bei der hier bearbeiteten Aufgabe war der wahrscheinliche Beobachtungsfehler einer Variablen bekannt, während derjenige der anderen nur roh bestimmt werden konnte. Zur Entscheidung der Frage, ob die ursprünglichen Beobachtungen einen Hinweis auf die relativen Gewichte für die beiden Variablen liefern, gibt Verf. eine Beziehung, die ein Urteil über die Zulässigkeit der angenommenen Gewichte fällt. Voraussetzung ist allerdings, daß die Beobachtungsdaten umfangreich sind oder daß die Beobachtungen mehrere Male wiederholt werden können; diese Forderung war bei den Anwendungen erfüllt.

Schmehl (Potsdam).

● **Lips:** Formeln und Tafeln zur Berechnung der ellipsoidischen, der konformen und der geographischen Koordinaten mit der Rechenmaschine. Stuttgart: Konrad Wittwer 1932. 56 S. RM. 3.50.

Christensen, S. A.: Exhaustion — Integration. Euclid — Archimedes. Mat. Tidsskr. A H. 3/4, 101—130 (1931) [Dänisch].

Picht, Johannes: Über neue Integrappen der Askania-Werke. (Ges. f. angew. Math. u. Mech., Bad Elster, Sitzg. v. 13.—18. IX. 1931.) Z. angew. Math. u. Mech. **11**, 442 bis 443 (1931).

Eine sehr kurze Beschreibung des Integrometers, eines Instrumentes zur Auswertung der Integrale $\oint_{\sin}^{\cos} n \varphi(r) dr$, $\oint \frac{1}{r} \cos n \varphi(r) dr$ und $\int_{a_1}^{a_2} f(a) \cos a da$ wird

gegeben; Konstruktionseinzelheiten und Wirkungsweise des Apparates sind aus dem Bericht nicht ersichtlich, auf eine eingehendere Veröffentlichung in der Z. Instrumenten-tenke wird verwiesen. Die erreichbare Genauigkeit des Integrometers soll 1—2% betragen.

G. Koehler (Darmstadt).

Salamon, B.: Das Prytzsche Planimeter. Rozhl. mat.-přirod. **10**, 100—108 (1931) [Tschechisch].

Mechanik.

Vrkljan, V. S.: Zur Frage des neuen Hagenschen Beweises für die Drehung der Erde. Z. Geophys. **7**, 360—366 (1931).

Die Ausführungen von J. G. Hagen in den Naturwiss. **18**, 805—807 (1930) wollen in der ovalartigen Bewegung des Foucaultschen Pendels, der sog. Vivianischen Spirale,

gegen Ende dieses Schwingungsversuches einen 2. Beweis für die Erddrehung erblicken. Nach Hagens Auffassung wird die ursprünglich kaum von einer Geraden abweichende Ellipse, die der seitlich an einem Haken angebundene Pendelkörper in Richtung der Erddrehung beschreibt, bei Abnahme der Amplitude auf Grund des Flächensatzes verbreitert. J. Stein [Naturwiss. 19, 39 (1931)] und R. Grammel haben sehr bald Bedenken gegen diese Auffassung geäußert, insofern, als bei Gültigkeit des Flächensatzes die kleine Halbachse der Ellipse viel kleiner sein müßte als die beobachtete. — Die Unzulässigkeit der Anwendung des Flächensatzes auf den Foucaultschen Pendelversuch, speziell zur Erklärung der Vivianischen Spirale, wird vom Verf. analytisch direkt nachgewiesen. Dazu rechnet er für den Fall einer kleinen Dämpfungskonstante aus, daß die betreffenden Flächenräume mit der Zeit veränderlich, also nicht konstant sind; d. h. der Flächensatz kann hier nicht angewendet werden. Darüber hinaus wird zur Erklärung der ellipsenförmigen Spirale die Vermutung ausgesprochen, daß sie durch seitliches Mitschwingen des Aufhängepunktes als ein Resonanzphänomen aufzufassen sein könnte. Die besonderen Umstände, unter denen die Spirale überhaupt auftritt, sind experimentell noch nicht geklärt. *G. Wiarda (Dresden).*

Cassina, Ugo: Grave in terra rotante. Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. fis. ecc. 66, 428—432 (1931).

L'A., riconosciuto che il problema della caduta di un grave sulla terra rotante è di analisi finita, lo risolve in generale senza alcuna integrazione, ritrovando poi, in prima approssimazione, le note deviazioni dalla verticale. *Autoreferat.*

Lely, U. Ph.: Über die Eigenschaften des Schwerefeldes in einem rotierenden Raum mit Attraktionszentrum. Physica (Eindhoven) 11, 343—358 (1931) [Holländisch].

Krall, G.: L'invariante adiabatico nel moto libero dei giroscopi. I. Atti Accad. naz. Lincei, VI. s. 14, 179—184 (1931).

Die Note enthält eine übersichtliche Durchrechnung der Gleichungen des Eulerschen Pendels von dem Gesichtspunkte der Theorie der adiabatischen Invarianten.

Wintner (Baltimore).

Synge, J. L.: Hodographs of general dynamical systems. Trans. Roy. Soc. Canada, III. s., III 25, 121—136 (1931).

The author studies the hodographs of general holonomic dynamical systems. He constructs the hodograph from the velocity vectors along a trajectory by using Levi-Civita parallelism in the configuration space to transport them along the trajectory to a single point on it. The hodograph is located in a flat space and is independent of the point on the trajectory chosen. Necessary and sufficient analytic conditions for all the hodographs to be circles are obtained. A necessary condition for hodographs of constant first curvature is that the lines of force be geodesics. For spherically symmetric systems there is always a law of force, unique to within a constant factor, for which all the hodographs are circles. This generalizes Hamilton's property of the inverse square law of central force. *P. Franklin (Cambridge, Mass.).*

Martin, Monroe: Upon the solutions of the equations of variation belonging to the equilateral Lagrangian libration points in the restricted problem of three bodies. Astron. Nachr. 244, 161—170 (1931).

Die Note behandelt die Variationsgleichungen der äquilateralen Gleichgewichtslösungen des restringierten Dreikörperproblems bei jedem Werte des Massenprozent-satzes μ mit einer Vollständigkeit, wie diese an sich elementaren Diskussionen in der Literatur nicht zu finden sind. Betrachtet werden im Anschluß an E. Strömberg (vgl. z. B. Publ. Københavns Observ. Nr 67) auch Massenprozent-sätze, die oberhalb der sogenannten Routhschen Stabilitätsschranke $\mu = \mu_0$ liegen und bei welchen die allgemeine Lösung der Variationsgleichungen durch die Superposition von zwei Spiralscharen gegeben wird, während zu $\mu < \mu_0$ bekanntlich zwei Ellipsenscharen gehören. In dem Grenzfall gibt es eine Ellipsenschar und außerdem eine säkulare Schar, die

jetzt explizit berechnet wird. Als eine Anwendung der entwickelten Formeln wird eine von Strömgren (l. c.) für $\mu = \frac{1}{2}$ gefundene Regel verallgemeinert. Es wird ferner die von Strömgren (ibid. Nr 70) numerisch gefundene Verschmelzung der beiden Ellipsenscharen und der beiden Spiralscharen mit der zu dem Grenzfall $\mu = \mu_0$ gehörigen Ellipsenschar analytisch verifiziert. — Auf Grund der von dem Verf. angegebenen Formeln hat Jenny E. Rosenthal einige das ganze Gebiet des Massenprozentsatzes umfassende Tabellen gerechnet.

Wintner (Baltimore).

Krall, Giulio: Spiegazione energetica della tendenza al parallelismo degli assi di rotazione di due corpi gravitanti e rotanti. Boll. Un. mat. ital. 10, 283—287 (1931).

Das Kelvin-Darwinsche Problem betreffend den Endverlauf des Fluteffektes zweier einander anziehender Himmelskörper wird hier vom Verf. in einer elementaren Weise angesetzt, nachdem er das Problem in einer früheren Note (vgl. nachstehendes Referat) im Anschluß an Levi-Civita (Atti Congr. Bologna 1928) unter Zugrundelegung der Theorie der adiabatischen Invarianten behandelt hat. Jetzt wird von einer einfachen Minimumforderung für die Energie ausgegangen. Aus den Bedingungsgleichungen des Extremums folgt unmittelbar, daß die Drehgeschwindigkeiten der beiden Körper um ihre Achsen mit der Drehgeschwindigkeit der Syzygienachse identisch sein müssen, und zwar auch dann, wenn die Rotationsachsen auf der Bahnebene nicht senkrecht stehen.

Wintner (Baltimore).

Krall, G.: Influenze adiabatiche delle maree nel moto kepleriano di due corpi celesti giroscopici. Nota II. Atti Accad. naz. Lincei, VI. s. 14, 270—276 (1931).

Die Note bringt eine interessante Weiterführung der von Levi-Civita (Atti Congr. Bologna) entwickelten Behandlung des Kelvin-Darwinschen Problems und enthält analytische Ausführungen zu einem kürzlich erschienenen Aufsatz des Verf. (vgl. vorstehendes Referat), die auf der Theorie der adiabatischen Invarianten beruhen.

Wintner (Baltimore).

Higab, M. A.: The steady motion of two doublets. Philosophic. Mag., VII. s. 12, 993—1015 (1931).

Lengthy calculations which deal with the motion of two rigid bodies assumed each to carry an electrical charge as well as a magnetic doublet.

Doermann (New York).

Vreedenburg, C. G. J.: Trägheitsisoklinen und -trajektorien. Ingenieur 1931 I, A13—A15 [Holländisch].

Das System der Trägheitsisoklinen eines ebenen Schnittes ist identisch mit dem Strömungslinienbild zweier Quellen (oder Senken) gleicher Ergiebigkeit, die sich in den beiden Trägheitskreispunkten des Schnittes befinden.

Autoreferat.

Bjerke, Bj.: Fortpflanzungsgeschwindigkeit in elastischen Medien. Norsk mat. Tidsskr. 13, 79—85 (1931) [Norwegisch].

Die Arbeit bezweckt eine einwandfreie elementare Ableitung der Gesetze der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Störungen in elastischen Medien. Es werden behandelt: die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer axialen Druckänderung in einem festen stabförmigen Körper, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Querverschiebung in einem biegezugfesten Stab, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in der Luft und schließlich die einer Querverschiebung in einem gespannten Seil.

Neményi (Berlin).

Späth, W.: Die Resonanzkurve als Unterlage für dynamische Untersuchungen. Ing.-Arch. 2, 651—667 (1932).

Die bekannten Vektordiagramme zur Darstellung der erzwungenen harmonischen Schwingungen eines Systems mit einem Freiheitsgrad werden besprochen, die Resonanzkurven für Auslenkung, Geschwindigkeit und Leistung bei konstanter und bei quadratisch mit der Frequenz wachsender erregender Kraft werden ermittelt und einfache Formeln zur Bestimmung der Dämpfung aus experimentell gefundenen Resonanzkurven mitgeteilt.

Prager (Göttingen).

Schenkel, Heb.: Große Spannweiten und ihre Grenzen. Elektrotechn. Z. 1932, 27—29.

Ein Seil ist an zwei Punkten A und B gehalten, deren Höhenunterschied und deren waagerechte Entfernung gegeben ist. Die Ordinaten der Kettenlinie, d. h. ihre Abstände von der Leitlinie, sind proportional dem Zug im Seil. Die Frage nach derjenigen Kettenlinie, für welche diese Ordinaten in A und B ein Minimum werden, führt auf ein gewöhnliches Extremumproblem mit einer Nebenbedingung. Ohne Beweis wird der hieraus folgende Satz gegeben: Von allen Kettenlinien, die man durch zwei beliebige Punkte A und B legen kann, hat diejenige die kleinsten Ordinaten in diesen Punkten, deren Tangenten sich auf der Leitlinie schneiden. (Dies erinnert übrigens an die Deutung der konjugierten Punkte beim Jacobischen Kriterium, wie sie Lindelöf für die Kettenlinie gegeben hat.) — Des weiteren wird die Aufgabe gelöst, durch die beiden gegebenen Punkte diejenige Kettenlinie zu legen, für die im oberen Punkte B der Zug vorgeschrieben ist, und zwar auf rechnerischem Wege durch Approximation, wobei zunächst angenommen wird, daß die Kettenlinie durch eine Parabel ersetzt werden kann. Im Zusammenhang hiermit werden einige geometrische Beziehungen an der Kettenlinie angegeben, deren eine schon bei Schell (Theorie der Bewegung und der Kräfte. Bd. 2) zu finden ist. *W. Meyer zur Capellen* (Koborn-Mosel).

Beyer, Rudolf: Neue Wege zur zeichnerischen Behandlung der räumlichen Mechanik. (Ges. f. angew. Math. u. Mech., Bad Elster, Sitzg. v. 13.—18. IX. 1931.) Z. angew. Math. u. Mech. 11, 440—442 (1931).

Es werden einfache, auf den Methoden der darstellenden Geometrie aufgebaute Wege gezeigt, um für die Zwecke der räumlichen Mechanik und Kinematik das vektorielle und das skalare Produkt zweier Vektoren zeichnerisch schnell zu finden. Die Figuren sind gegenüber anderen Verfahren linienärmer und leichter verständlich.

W. Meyer zur Capellen (Koborn-Mosel).

Rauh, Kurt: Die Ableitung einer Hubbewegung mit drei Stillständen von Koppelkurven. Z. Ver. deutsch. Ing. 1932, 87—90.

Es werden — ohne theoretische Begründung, rein durch zeichnerisches Probieren — diejenigen Koppelkurven und auf ihnen diejenigen drei Punkte angegeben, welche drei Rasten ermöglichen, d. h. für welche die Koppelkurve angenähert durch einen Kreisbogen des gleichen Halbmessers ersetzt werden kann. Durch welche Maßzahl oder sonstige Größe der „angenäherte“ oder „grob angenäherte“ Stillstand gekennzeichnet ist, wird nicht angegeben. *Meyer zur Capellen* (Koborn-Mosel).

Abrameseo, Niculae: Le mouvement d'une figure plane variable qui reste semblable à elle-même. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. e mat., II. s. 1, 155—164 (1932).

Eine Wiedergabe der Hauptergebnisse für die ebene Bewegung eines Systems, das sich dabei ähnlich verändert, wobei analoge Probleme wie bei der Bewegung starrer Systeme auftreten. Hier werden mittels Geschwindigkeits- und Beschleunigungsbeobachtungen die Momentanbewegung, die Polkurven, der Wendekreis analytisch betrachtet und eine Konstruktion für den Krümmungskreis in einem Bahnpunkte angegeben. Vgl. hierzu die weitgehende Darstellung in M. Krause, Analysis der ebenen Bewegung 1920, ein Lehrbuch, das in den zahlreichen Literaturangaben fehlt. *Eckhart* (Wien).

Rudakow, A.: Berechnung der räumlichen symmetrischen Vieleckrahmen für beliebige Belastung. Ing.-Arch. 2, 528—568 (1931).

Es wird ein sechsstielliger räumlicher Rahmen mit eingespannten Füßen bei beliebigem Lastangriff untersucht. Die Berechnung des 36fach statisch unbestimmten Systems wird unter Ausnutzung seiner Symmetrie mit Hilfe eines statisch unbestimmten Hauptsystems durchgeführt. *Prager* (Göttingen).

Galerkin, B.: Contribution à la solution du problème de la théorie d'élasticité dans le cas de trois dimensions à l'aide des fonctions des tensions et des déplacements. Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R. A Nr 10, 281—286 (1931) [Russisch].

Die Spannungen und die Verschiebungen in einem isotropen elastischen Körper werden, zunächst in kartesischen und dann in Zylinderkoordinaten, durch drei bi-

harmonische Funktionen vom Charakter eines Vektors ausgedrückt, und zwar die Spannungen durch die dritten und die Verschiebungen durch die zweiten Ableitungen dieser Funktionen. Im Fall eines rotationssymmetrischen Körpers können die drei unbekannten Funktionen auf zwei Funktionen von je zwei Veränderlichen zurückgeführt werden. *V. Fock (Leningrad).*

Galerkin, B.: Flexion des plaques épaisses élastiques, rectangulaires et triangulaires, posées sur leurs contours. Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R. A Nr 10, 273—280 (1931) [Russisch].

Im Fall einer frei gestützten rechteckigen oder dreieckigen Platte (gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck) unter der Wirkung normaler Kräfte können die Spannungen und die Verschiebungen durch eine Funktion ausgedrückt werden (vgl. vorstehendes Ref.). Diese Funktion wird, zunächst für den Fall einer rechteckigen Platte, in Form einer trigonometrischen Reihe in bezug auf x, y (Koordinaten in der Ebene der Platte) mit von z abhängigen Koeffizienten (Produkte einer linearen und einer hyperbolischen Funktion) angesetzt. Die Konstanten werden durch die Fourierkoeffizienten der gegebenen Druckverteilung ausgedrückt. Der Fall einer dreieckigen Platte läßt sich auf den obigen zurückführen. *V. Fock (Leningrad).*

Pólya, G.: Bemerkung zur Interpolation und zur Näherungstheorie der Balkenbiegung. (Ges. f. angew. Math. u. Mech., Bad Elster, Sitzg. v. 13.—18. IX. 1931.) Z. angew. Math. u. Mech. 11, 445—449 (1931).

Mit Hilfe von allgemeinen Sätzen, welche aus der Hermiteschen bzw. Birkhoff'schen Interpolationsformel ableitbar sind, untersucht der Verf. die Frage, wie bei dem homogenen Balken, dessen Durchbiegung y der Differentialgleichung $y'''' = q(x)$ genügt, aus den zu den Endpunkten a und b gehörenden 8 Größen: $y(a), y'(a), y''(a), y'''(a), y(b), y'(b), y''(b), y'''(b)$, vier gewählt werden dürfen, damit die Differentialgleichung eine eindeutige Lösung zuläßt. Randbedingungen der betrachteten Art gibt es $\binom{8}{4} = 70$; von diesen haben nur 42 die genannte Eigenschaft. Wenn Fälle, welche durch Vertauschung der beiden Balkenenden ineinander übergehen, nicht unterschieden werden, reduzieren sich diese Zahlen auf 38 und 22. *Biezeno (Delft).*

Kouskoff, Georges: Déformation des anneaux circulaires minces sous l'action de forces radiales. Rev. gén. Électr. 30, 861—870 u. 908—917 (1931).

Vorliegende Arbeit geht aus von der Biegungstheorie des dünnen, gekrümmten Stabes, dessen Belastungen in der Ebene der Stabmittellinie liegen. Die Deformationen und Spannungen lassen sich als Integrale darstellen, die die Funktionen der Biegemomente und Normalkräfte über die Länge des Stabes enthalten. Der Verf. beschränkt seine Betrachtungen auf den kreisförmigen Stab und berechnet Deformationen und Spannungen für den Fall radialer Kräfte, die so auf dem Umfang verteilt sind, daß n Symmetrieachsen (n ganze Zahl ≥ 2) vorhanden sind. So werden z. B. für n gleiche, in gleichen Abständen auf dem Umfang verteilte Kräfte Spannungen und Deformationen angegeben und diskutiert. Auch der Fall, daß kontinuierliche Radialkräfte auf dem Umfang angreifen, wird für ähnliche Symmetriebedingungen durchgeführt. Als Beispiel folgt die Berechnung der Spannungen und Deformationen des Rotors einer Wechselstrommaschine, dessen Polkranz durch Speichen mit der Nabe verbunden ist. Die wichtigsten Funktionen sind für verschiedene Polzahlen in Tabellen angegeben. *Zieher (Jena).*

Weinel, E.: Über achsensymmetrische Randwertaufgaben der Elastizitätstheorie. (Ges. f. angew. Math. u. Mech., Bad Elster, Sitzg. v. 13.—18. IX. 1931.) Z. angew. Math. u. Mech. 11, 438—439 (1931).

Der Verschiebungszustand im Innern eines endlich begrenzten Körpers, auf den nur Oberflächenkräfte wirken, läßt sich mit Hilfe einer Oberflächenbelegung von Einzelkräften darstellen, deren Verschiebungsfeld bekannt ist. Für diese Oberflächenbelegung erhält man drei simultane Integralgleichungen, von denen bei völliger Achsensymmetrie nach Einführung von Zylinderkoordinaten die auf den Drehwinkel bezügliche von den beiden anderen unabhängig wird. Die Kerne enthalten gewisse elliptische

Integrale. Zur numerischen Auflösung der drei Integralgleichungen schätzt sich der Verf. aus physikalischen Überlegungen die Oberflächenverteilung roh ab und empfiehlt dann die Methode der sukzessiven Approximation. Eine ausführlichere Darstellung soll noch veröffentlicht werden.

Rudolf Iglisch (Aachen).

Gradstein, S., und W. Prager: Beanspruchung und Formänderung von Stabwerken bei erzwungenen Schwingungen. Ing.-Arch. 2, 622—650 (1932).

Die rechnerischen Vorteile der aus der Statik der Stabwerke bekannten Methoden des Drei- bzw. Viermomentensatzes finden ihre analytische Begründung darin, daß an Stelle einfach gebauter Fundamentallösungen der Biegungsdifferentialgleichung mit mechanisch nicht ohne weiteres interpretierbaren Integrationskonstanten ein zwar formal komplizierteres Fundamentalsystem benutzt wird, dessen Konstanten jedoch eine unmittelbare mechanische Bedeutung (nämlich Durchbiegungen und Biegemomente in den Endpunkten des betrachteten Stabwerkteils) besitzen. Die Übertragung dieses Verfahrens auf dynamische Probleme der Stabwerkstheorie bildet den Grundgedanken der vorliegenden Arbeit, die die Ermittlung von Beanspruchung und Formänderung eines Stabwerks im stationären („eingeschwungenen“) Zustand unter dem Einfluß einer zeitlich periodisch veränderlichen Einzellast mit festem Angriffspunkt zum Gegenstand hat. Dabei werden zunächst lediglich Transversalschwingungen behandelt, die beim durchlaufenden Balken weitgehend unabhängig von etwa gleichzeitig vorhandenen Longitudinalschwingungen erfolgen; für Rahmenträger jedoch ist die Berücksichtigung von Längsschwingungen unerlässlich, die in analoger Weise geschieht und die zugleich die Grundlage zur Behandlung der erzwungenen Torsionsschwingungen von Kurbelwellen bildet, worauf jedoch nicht näher eingegangen wird. Die zur praktischen Durchführung der Rechnung erforderlichen Zahlenwerte spezieller trigonometrischer und hyperbolischer Funktionen sind der Arbeit in umfangreichen Tabellen beigegeben, und die Arbeitsweise des Verfahrens wird durch sieben Beispiele erläutert, die sich auf technisch besonders wichtige Spezialfälle beziehen.

Harry Schmidt (Köthen)

Teichmann, Alfred: Zur Berechnung auf Knickbiegung beanspruchter Flugzeugholme. (Statische Abt., Dtsch. Versuchsanst. f. Luftfahrt, Berlin-Adlershof.) Luftfahrtforschg 9, 85—134 (1931).

Die in einer Ebene liegenden Holme eines zweiholmigen abgestrebten Eindeckerflügels oder eines Flügels in einem verspannten Doppeldecker können als mehrfach gestützte Balken aufgefaßt werden, welche durch parallele Rippen zu einem Rost verbunden sind. Die Holme werden gleichzeitig auf Biegung und Druck beansprucht („Knickbiegung“), ihre Berechnung erfolgt gewöhnlich ohne Eingehen auf die Rippenverbundwirkung, und der Einfluß der über die Holmlänge veränderlichen Biegesteifigkeit wird meist nur überschläglich berücksichtigt. Holme mit mehreren Stützpunkten, welche in der Flügelebene ein Vieleck bilden, werden in der Regel als geradlinig behandelt. In der vorliegenden Arbeit werden Verfahren entwickelt, welche die einwandfreie Erfassung der genannten Einflüsse gestatten. — Die Formänderungen bei veränderlicher Biegesteifigkeit werden zunächst nach dem Ritzschen Verfahren angenähert ermittelt und die so gefundene Näherung nach dem Verfahren der sukzessiven Approximationen verbessert. — Zur Berücksichtigung der Rippenverbundwirkung werden verschiedene Verfahren angegeben. Die zwei entsprechende Stützpunkte der Holme verbindenden „Lagerrippen“ sowie die Endrippen an den Flügelen sind im allgemeinen stärker ausgebildet als die übrigen Rippen („Zwischenrippen“), es wird daher in vielen Fällen genügen, das aus den Holmen und den Lager- und Endrippen bestehende Rosttragwerk der Rechnung zugrunde zu legen. Es werden jedoch auch strenge und näherungsweise richtige Formeln zur Berücksichtigung der Zwischenrippen angegeben. Aus einem durchgerechneten Beispiel geht die zum Teil recht beträchtliche Verminderung der Knickbiegungsbeanspruchung der Holme infolge der Rippenverbundwirkung hervor. — Der außerordentlich gründlichen Arbeit ist ein sehr vollständiges Verzeichnis des neueren einschlägigen Schrifttums beigelegt.

Prager (Göttingen).

Inui, Teturô, Masao Kotani und Zyurô Sakadi: On the motion of the earth's surface under the influence of a heavy moving body. Proc. phys.-math. Soc. Jap., III. s. 13, 223—252 (1931).

Der Aufsatz diskutiert unter Zugrundelegung gewisser Vereinfachungen die Oberflächenwellen bzw. ihre integralen Superpositionen, die am Rande eines von einer

Vollebene begrenzten unendlichen elastischen Mediums durch die Bewegung eines auf der Randebene geradlinig und gleichmäßig bewegten Körpers unter ausschließlicher Berücksichtigung des Normaldruckes erzeugt werden. *Wintner* (Baltimore).

Weber, C.: Beitrag zur Berührung gewölbter Oberflächen beim ebenen Formänderungszustand. (*Ges. f. angew. Math. u. Mech., Bad Elster, Sitzg. v. 13.—18. IX. 1931.*) *Z. angew. Math. u. Mech.* **11**, 426 (1931).

In dem Vortragsauszug wird angedeutet, wie man die Spannungen und (ebenen) Verschiebungen eines elastischen Systems bestimmt, welches aus einer Walze besteht, die auf eine elastische Unterlage endlicher Breite drückt. In Erweiterung der Hertz'schen Formeln werden Beziehungen für die Zusammendrückung gegeben.

K. Hohenemser (Göttingen).

Davin, M.: Sur l'état élastique d'un corps indéfini à deux dimensions percé d'un trou circulaire. *C. R. Acad. Sci. Paris* **193**, 1318—1321 (1931).

Bijlaard, P. P.: Knicksicherheit des oberen Randes offener Wandbrücken. *Ingenieur* **1932**, B 1—B 4 [Holländisch].

Neut, A. van der: Torsion und Abschiebung mehrfach zusammenhängender Dosenlager. *Ingenieur* **1931 II**, W 171—W 181 [Holländisch].

● **Kleinlogel, A.: Belastungsglieder. Formeln und Tabellen für Querkräfte, Momente und Belastungsglieder (Kreuzlinienabschnitte) des einfachen Balkens für alle praktisch vorkommenden Belastungen. 104 Belastungsfälle. 4. vollst. neubearb. u. bedeutend erw. Aufl.** Berlin: Ernstsche Buchhandl. 1931. VIII, 117 S. RM. 7.80.

Mechanik der flüssigen und gasförmigen Körper:

Richter, H.: Nomogramme in der Strömungstechnik. Gas- u. Wasserfach **1932**, 141—144.

Zur Vereinfachung von oft wiederkehrenden Rechnungen in der Strömungstechnik wurden 4 Nomogramme gezeichnet, auf deren geradlinigen Skalen man gut interpolieren kann. Zwei Nomogramme dienen zur Ermittlung der Reynoldsschen Zahl bei Wasser- und Luftströmen aus Geschwindigkeit, Rohrdurchmesser, Temperatur und Druck. Aus einem dritten Nomogramm kann man den Druckverlust bei Strömung in geraden Rohren entnehmen — bei raumbeständigen Flüssigkeiten exakt, bei zusammendrückbaren angenähert. Zur genaueren Berechnung des Druckverlustes bei expandierenden Stoffen, also Gasen und Dämpfen, dient ein viertes Nomogramm. *Autoreferat.*

Trendelenburg, Ferdinand: Fortschritte der Akustik unter besonderer Berücksichtigung der Arbeiten der angewandten Akustik. *Z. Hochfrequenztechn.* **37**, 105—112, 235—237, **38**, 33—40, 80—84, 115—118, 153—159 u. 189—195 (1931).

Dieser zusammenfassende Bericht behandelt die neuesten Ergebnisse der experimentellen und theoretischen Akustik. Im vorliegenden Referat werden nur die theoretischen Ergebnisse erwähnt. Als erster Punkt findet sich die Reflexion des Schalles an ebenen und gekrümmten starren Flächen. Soweit sie in der Raumakustik als Widerhall auftreten, wurden sie rechnerisch und experimentell von E. Scharstein, W. Schindelin, F. R. Watson, E. Michel, W. Linck, W. Kuntze, F. Trendelenburg, C. Zwikker behandelt. Insbesondere ist rechnerisch das Verhältnis von direktem und reflektiertem Schall erfaßt und für die richtige Aufstellung von Lautsprechern und Klangschirmen nutzbar gemacht worden (C. Zwikker). M. Nuyens, G. Th. Philippi und A. D. Fokker haben sich mit der Berechnung und Konstruktion von Schallreflektoren befaßt, wobei gewisse Flächen vierten Grades herauskommen. Letztgenannter Autor und Referent haben diese Reflektoren experimentell kontrolliert. Theoretisch wurde die Wirkung von Stimm- und Gehörorganen untersucht. Weitgehende Fortschritte hat die theoretische Erfassung des Nachhalls großer Räume aufzuweisen. Nach den grundlegenden Arbeiten W. C. Sabines († 1917) haben sich u. a. A. D. Fokker, K. Schuster, E. Waetzmann, C. F. Eyring, S. Lifshitz, G. v. Bekesy und Referent mit der Ableitung von Nachhallformeln befaßt, wobei

alle außer dem Referenten von mehr oder weniger vereinfachenden mathematischen Annahmen Gebrauch machen (z. B. Schallstrahlen). Insbesondere sind auch Ausdrücke für die theoretisch günstige Nachhaldauer erhalten worden. Von E. T. Paris und J. Larmor sind theoretisch Ausdrücke für die Schallreflexion an ebenen absorbierenden Wänden abgeleitet worden, die aber zu entgegengesetzten Schlußfolgerungen führten. Völlige Klärung dieser Frage steht experimentell und theoretisch noch aus. Gleiches gilt von der Schalldurchlässigkeit, wobei eine eingehende und grundlegende Arbeit E. Meyers vorliegt. Bei der Schallaufzeichnung auf Tonfilmen und Schallplatten treten einige einfache, aber interessante theoretische Betrachtungen auf. Bei Schallsender und Schallempfänger spielen Beugungsberechnungen eine Rolle, wobei Richteffekt- und Richtungsempfindlichkeitskurven herauskommen. Insbesondere liegt vom Ref. eine Berechnung der Schallschirmwirkung vor. H. Neumann hat theoretisch den Wirkungsgrad elektrodynamischer Lautsprecher untersucht.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Da Rios, Luigi Sante: Anelli vorticosi ruotanti. Rend. Semin. mat. Univ. Padova 2, 142—151 (1931).

Ricordate le espressioni della velocità indotta da una linea vorticoso di forma qualunque esistente in un fluido omogeneo, l'A., riferendosi a suoi precedenti lavori, deduce che un filetto vorticoso piano può muoversi rigidamente soltanto quando ruota intorno ad una retta complanare, ponendo in evidenza tre tipi di linee integrali che egli chiama rispettivamente: pseudocicloide, pseudocatenaria e senoide fluviale. Fa seguito l'esame degli anelli tubolari vorticosi di rivoluzione con linee meridiane rotatorie: dalla velocità indotta risultante in un punto generico di una linea meridiana degli anelli consegue, fra l'altro, che un anello tubolare a linee vorticoso meridiane è sollecitato a ruotare attorno al suo asse di simmetria. L'A. termina con alcune considerazioni sugli anelli pieni e sui vortici eterei a proposito della struttura dell'atomo.

Bossolasco (Turin).

Maccoll, John W.: Zur Theorie der Strömung um einen Kreiszyylinder bei sehr kleinen Reynoldsschen Zahlen. (Ges. f. angew. Math. u. Mech., Bad Elster, Sitzg. v. 13.—18. IX. 1931.) Z. angew. Math. u. Mech. 11, 422—423 (1931).

Unter Zugrundelegung der Stokesschen Näherung für die zähe Flüssigkeitsströmung um einen Zylinder ist es nicht möglich, die Randbedingungen im Unendlichen zu erfüllen. Als Ausweg aus dieser Schwierigkeit schlägt J. W. Maccoll vor, eine hinreichend große zylindrische Kontrollfläche um den Zylinder zu legen, und auf dieser gedachten Begrenzungsfläche die Randbedingungen zu befriedigen. (In den durchgerechneten Beispielen hatte die Kontrollfläche den 10fachen Durchmesser des bewegten Zylinders.) Die Rechnung stützt sich unter Vernachlässigung gewisser Trägheitsglieder auf die Differentialgleichung der Stromfunktion ψ

$$\Delta \Delta \psi = R \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \Delta \psi}{\partial r} \right\} \quad (1)$$

(r, θ Polarkoordinaten), und der Verf. benutzt zur Lösung einen Ansatz

$$\psi(r, \theta) = \sum_0^{\infty} \psi_n(r, \theta) R^n, \quad (2)$$

der nach Potenzen der Reynoldsschen Zahl R fortschreitet. Die drei ersten Glieder der Entwicklung (2) hat der Verf. analytisch bestimmt und daraus Stromlinienbilder für folgende Fälle aufgezeichnet:

1. $R \rightarrow 0$
2. $R = 5$
- a) mit $\psi = \psi_0 + \psi_1 R$
- b) mit $\psi = \psi_0 + \psi_1 R + \psi_2 R^2$. Weincl.

Quarleri, A.: Sulla teoria della „scia“ nei liquidi perfetti. Caso del cilindro rotondo. Atti Accad. naz. Lincei, VI. s. 14, 332—337 (1931).

Das Problem, eine zweidimensionale Strömung mit Totwasser von vorgeschriebener Widerstandskontur zu bestimmen, läßt sich nach Levi-Civita auf die Auflösung

einer Integrodifferentialgleichung zurückführen, welche sich für den Fall einer Kreislinie auf die folgende nichtlineare Integralgleichung reduziert:

$$T(\sigma) = -\frac{a^2}{\pi} \int_0^\pi e^{T(\sigma_1)} \sin \sigma_1 (1 + \sin \sigma_1) \log \left(\frac{\sin \frac{\sigma_1 + \sigma}{2}}{\sin \frac{\sigma_1 - \sigma}{2}} \right)^2 d\sigma_1.$$

Verf. teilt vorläufig ohne ausführlichen Beweis mit, daß diese Gleichung nach den Ergebnissen von A. Hammerstein [Acta Math. 54, 117ff. (1930)] eine eindeutig bestimmte Lösung besitzt.

A. Weinstein (Breslau).

Jones, Arthur Taber: The stability of a single file of straight vortices. Physic. Rev., II. s. 38, 2068—2070 (1931).

In this paper the stability of an infinite row of equal and equally spaced rectilinear vortices is considered. It is shown that if one of the vortices is displaced slightly its velocity, due to the remaining vortices, depends on the displacement. There are two planes (inclined at an angle of 45° to the plane of the rectilinear vortices and parallel to the vortices) such that for a displacement in one of the planes the velocity is directed towards the original position and for a displacement in the other of the two planes the velocity is away from the original position.

Murnaghan (Baltimore).

Bergmann, Stefan: Über Flüssigkeitsbewegungen mit Unstetigkeitsflächen. (Ges. f. angew. Math. u. Mech., Bad Elster, Sitzg. v. 13.—18. IX. 1931.) Z. angew. Math. u. Mech. 11, 405—407 (1931).

Verf. formuliert in dieser vorläufigen Mitteilung folgenden Nachbarschaftssatz: Zu jeder Kanalströmung mit Widerstandskörper einer gewissen Klasse gibt es Nachbarströmungen mit gleicher Zuflußgeschwindigkeit und wesentlich verschiedener Abflußgeschwindigkeit, deren Widerstandskontur beliebig wenig von der in einer erlaubten Weise abgeänderten Widerstandskontur der gegebenen Strömung verschieden ist. Dabei ist unter einer erlaubten Abänderung eine solche zu verstehen, wo die im Totwasser liegenden Teile der Kontur durch andere Kurven zu ersetzen sind, die sich unmittelbar an die feste Berandung anschließen und sich noch im Totwasser befinden.

A. Weinstein (Breslau).

Golaz, Maurice, et Jacques Mesnager: Loi de répartition des vitesses sur la verticale de parallélisme des filets dans une lame déversante. C. R. Acad. Sci. Paris 194, 54—56 (1932).

La loi établie regarde la vitesse v des points situés à l'intérieur de la lame d'eau d'un déversoir dont le profil δ soit un arc de cercle (rayon r_0) dans le voisinage de la verticale de parallélisme Ω (cfr. C. R. 193, 336; vgl. dies. Zbl. 2, 295). L'angle formé par la vitesse v avec l'horizontale soit α . — L'eau étant considérée comme un liquide élastique visqueux, soumis à l'action des seules forces extérieures pesanteur et force centrifuge, l'intégration des équations du mouvement en régime permanent conduit à un résultat qui vient transformé par les AA. introduisant l'angle de parallélisme limite α^* . La loi de répartition ainsi obtenue: $vr = C_1$ (I) est alors commune à d'autres phénomènes hydrauliques. Au moyen des valeurs relatives les plus probables des coefficients de Lamé résulte qu'on peut ammettre sans erreur appréciable que la répartition des vitesses de long de la verticale Ω est exprimé par (I) lorsque α est voisin de 30° .

Bossolasco (Turin).

Leray, J.: Mouvement lent d'un fluide visqueux à deux dimensions limité par des parois fixes. C. R. Acad. Sci. Paris 193, 1165—1166 (1931).

Real functions l and m which satisfy the diffusion equation $v \Delta m = \frac{\partial m}{\partial t}$ and take the same boundary values on the circle $x^2 + y^2 = a^2$ as the component velocities u and v are used to construct two new functions L and M by integrating with respect to the time from $-\infty$ to t . It is then easy to find an analytic function of the complex

variable $z = x + iy = Re^{i\omega}$, namely $F(z, t)$, such that a solution of the hydrodynamical equations without the inertia terms is given by the formula

$$u - iv = l - im + \frac{\nu h}{2\pi} \left[\frac{\partial}{\partial x} \int L' \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} \frac{d\lambda}{\lambda} + \frac{\partial}{\partial y} \int M' \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} \frac{d\lambda}{\lambda} \right] - F(z, t),$$

where h denotes the operator $\frac{\partial}{\partial y} + i \frac{\partial}{\partial x}$ and L', M' are obtained from L and M by replacing ω by $\omega - i \log \lambda$. The integrals are taken in a clockwise direction round the circle $|\lambda| = 1 - \varepsilon$ where $\varepsilon \ll 1$. This solution is found after a long calculation to be equivalent to one given by Oseen for the region outside the circle. Integrals of a similar type are used also to prove another theorem of which Oseen has used some particular cases. — An extension, depending on the use of integral equations of the Volterra type, is indicated for the case in which the solution is needed for the interior of a convex contour.

Bateman (Pasadena).

Thorade, H.: Strömung und zungenförmige Ausbreitung des Wassers. Gerlands Beitr. Geophys. **34**, Köppen-Bd. 3, 57–76 (1931).

Es werden die Ausbreitungserscheinungen untersucht, die mit dem Eindringen eines Stromes mit den Eigenschaften S (Salzgehalt, Temperatur, Planktongehalt usw.) in andersartige Wassermassen verbunden sind und die zur zungenförmigen Anordnung der Isolinien der Eigenschaft S führen. Soll die Abnahme einer Eigenschaft S (in einem raumfesten Volumenelement) infolge horizontaler Strömung (v_x) durch den vertikalen „Austausch“ (Scheindiffusion) $\frac{A}{\rho} \frac{\partial S}{\partial z}$ (A = Austauschkoeffizient, ρ = Dichte) kompensiert werden, so daß ein stationärer Zustand resultiert, so muß die Defantsche Gleichung

$$\frac{A}{\rho} \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} - \frac{\partial(v_x S)}{\partial x} = 0$$

gelten. Thorade zeigt an mehreren Lösungen dieser Gleichung (verschiedene Randbedingungen und verschiedene v_x -Verteilung), daß aus dem zungenförmigen Verlauf der Isolinien ein eindeutiger Rückschluß auf die Stromverteilung nicht möglich ist, weil der Verlauf der Isolinien in dominierender Weise durch die (zur Zeit nur ungenügend bekannten) Austauschvorgänge bestimmt wird. So kann sich z. B. ein zungenförmiger Verlauf der Isolinien infolge des Austausches auch in dem Gebiet ausbilden, in welchem die Stromgeschwindigkeit v_x konstant ist, wo also der „Zungenachse“ gar keine Schicht maximalster Geschwindigkeit („Stromachse“) entspricht; ferner kann die „Zungenachse“ geneigt sein, während die Strömung horizontal verläuft usw. Ertel (Berlin).

Poncet, Henri: Sur les cavitations elliptiques. C. R. Acad. Sci. Paris **194**, 247–249 (1932).

Das allgemeine Problem einer zweidimensionalen Blase (Hohlraum), die in einer idealen Flüssigkeit in einem bewegten Gefäß relativ zum Gefäß in Ruhe bleibt (vgl. dies. Zbl. **1**, 366 und **2**, 359), wird in dieser Note auf den Fall einer elliptischen Blase beschränkt. Es ergeben sich bei den verschiedenen möglichen Bewegungen des Gefäßes gewisse Beschränkungen in der Abweichung des Durchmesserverhältnisses vom Werte 1.

A. Busemann (Dresden).

Prandtl, L.: Über die Entstehung der Turbulenz. (Ges. f. angew. Math. u. Mech., Bad Elster, Sitzg. v. 13.—18. IX. 1931.) Z. angew. Math. u. Mech. **11**, 407–409 (1931).

Der Bericht von Prandtl vor der Naturforscherversammlung in Bad Elster beschränkt sich auf einige kurze Bemerkungen über den heutigen Stand der Untersuchungen zum Turbulenzproblem. Es werden zuerst die Fortschritte erwähnt, welche in der Erfassung der Instabilität der Laminarströmung erzielt worden sind durch die Tollmiensche Arbeit von 1929 und durch neuere, noch unveröffentlichte Rechnungen Tollmiens über Profile mit Wendepunkt. Sodann wird berichtet, daß Schlichting die Tollmienschen Rechnungen wiederholt hat für die Anfangszustände der Strömung zwischen zwei konzentrischen Zylindern, von denen der äußere umläuft und der innere stillsteht; die errechnete kritische Geschwindigkeit, welche bei dieser Anordnung sehr

hoch ausfällt, steht in guter Übereinstimmung mit experimentellen Daten (es sind auch hier nur zweidimensionale Störungen in Betracht gezogen). Schließlich werden einige Mitteilungen gemacht über eine Versuchseinrichtung, mit deren Hilfe das Verhalten endlicher Störungen untersucht werden soll. — Es ist zu hoffen, daß eine ausführlichere Veröffentlichung bald erwartet werden dürfte. *J. M. Burgers (Delft).*

Roop, Wendell P.: Laminar and turbulent flow about ship models. J. Franklin Inst. **213**, 195—209 (1932).

Weinblum, Georg: Die Theorie des Wellenwiderstandes und ihre praktischen Anwendungen. Z. Ver. deutsch. Ing. **1932**, 127—131.

Zusammenfassender Bericht über die hydrodynamischen Lösungen für die Berechnung des Wellenwiderstandes. Für schlanke Schiffe in idealer Flüssigkeit hat Michell (Philosophic. Mag. **28**) eine Theorie aufgestellt, deren Ergebnisse zwar empirisch nachgeprüft werden müssen, im allgemeinen aber befriedigen. Minimalbetrachtungen führen zu Formen kleinsten Widerstandes. — Für Gleitfahrzeuge gilt entsprechend die Theorie der Druckpunkte, d. i. die Beziehung der Wasseroberflächenform bei mit gleichförmiger Geschwindigkeit fortschreitender Belastung bei kleinen Tiefgängen. Hier führt die Hognersche Widerstandsformel (Delft 1924) ebenso wie die Theorie Michell zu dem Grenzwert Widerstand gleich Null für $v = \infty$. Die Arbeit schließt mit Bemerkungen über die Unterwasserfahrt und über den Flachwasserwiderstand. *v. d. Steinen.*

Seydel, Edgar: Elastizitätstheorie des starren Luftschiffs. Aus dem Nachlaß von Heinrich Müller-Breslau. (Statist. Abt., Dtsch. Versuchsanst. f. Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof.) Luftfahrtforschg **9**, 57—84 (1931).

Seydel, Edgar: Müller-Breslau „Elastizitätstheorie des starren Luftschiffs“. (Statist. Abt., Dtsch. Versuchsanst. f. Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof.) Z. Flugtechn. **23**, 46—51 (1932).

Trigona della Floresta, Ercole: Considerazioni sul comando degli aeroplani ad ala deformabile in relazione al centramento. Aerotecnica **11**, 1249—1267 (1931).

Man kann die statische Längsstabilität eines Flugzeugs so gestalten, daß für einen bestimmten Anstellwinkel, z. B. denjenigen der besten Gleitzahl, Flügelmoment und Leitwerkmoment ohne Ruderausschlag einzeln gleich Null sind. Dann ist auch die Normalkraft am Leitwerk sowie die am Steuerknüppel auszuübende Kraft gleich Null. Ein derartiger Zustand ist bei nicht deformierbarer Tragfläche nur für einen einzigen Anstellwinkel möglich. Der Verf. untersucht auf Grund von Windkanalmessungen die Möglichkeit, diesen Zustand durch Flügeldeformationen, z. B. mit Hilfe von Klappen oder Hanley-Page-Hilfsklappen, auch bei anderen Werten des Anstellwinkels zu erzielen. *S. Del Proposto (Aachen).*

Crocco, G. A.: Iperaviazione e superaviazione. Aerotecnica **11**, 1173—1220 (1931).

Die vorliegende Arbeit stellt eine Diskussion über Zukunftsaussichten für die Geschwindigkeitssteigerung bei Flugzeugen dar. Der Verf. veranschaulicht an Hand von Schaubildern den Verlauf des Widerstandes in Funktion der Geschwindigkeit bei einem Schneider-Wettbewerb-Flugzeug. Die bei Unterschallgeschwindigkeit geltenden Beziehungen für Profil und induzierten Widerstand verlieren ihre Gültigkeit im Überschallgebiet, wo andere Gesetzmäßigkeiten herrschen (Crocco: Sui corpi aerotermodinamici portanti. Vgl. dies. Zbl. **3**, 157), nach denen sich bedeutend höhere Werte für Profil und induzierten Widerstand ergeben. Der Leistungsbedarf bei Schallgeschwindigkeit und darüber erreicht am Boden im Vergleich zum Leistungsbedarf der beim letzten Schneider-Rennen verwandten Flugzeuge (halbe Schallgeschwindigkeit) Werte von einer Größenordnung, die jede Möglichkeit des Erreichens derartiger Geschwindigkeiten in Bodennähe ausschließen. Beim Flug in größeren Höhen jedoch, und zwar in solchen, bei denen für eine gewollte Geschwindigkeit der Widerstand einen Minimalwert aufweist, beträgt der Leistungsbedarf nur einen sehr geringen Bruchteil seines Wertes am Boden; woraus auf eine Möglichkeit des Erreichens von Überschallgeschwindigkeiten auf diesem Wege geschlossen wird. Weiter werden kurz die Fragen der Temperaturerhaltung in der Kabine, der Atmung der Insassen und der Steuerbarkeit gestreift; danach wird auf die größte Schwierigkeit, die in der Frage nach dem Vortriebsmittel besteht, ausführlicher eingegangen, um zu beweisen, daß der Höhenmotor in den, den betrachteten Geschwindigkeiten entsprechenden Höhen versagt, da die Kompressorleistungen im Verhältnis

zur Nutzleistung zu hoch werden. Der Verf. erinnert an ein von René Lorin 1913 vorgeschlagenes Vortriebsmittel (Crocco, *Sui corpi aerodinamici a resistenza negativa*, Rend. Lincei 1931; vgl. dies. Zbl. 2, 422) und weist darauf hin, daß dessen thermischer Wirkungsgrad bei den in Betracht gezogenen Geschwindigkeiten außerordentlich günstige Werte erreichen kann. Der Verf. schließt mit einer Brennstoffverbrauchsrechnung für einen nach den obigen Gesichtspunkten durchgeführten Flug über eine längere Strecke, wobei sich günstige Werte ergeben.
S. Del Proposto (Aachen).

Nusselt, W.: Die Strömung von Gasen durch Blenden. *Forsch. Ing. wes.* B 3, 11–20 (1932).

Der erste Teil der Arbeit enthält die Ähnlichkeitsbeziehungen einer Gasströmung, wobei aus Zweckmäßigkeitsgründen an Stelle der Reynoldsschen Zahl eine andere Kenngröße verwendet wird, die als charakteristische Geschwindigkeit die Schallgeschwindigkeit enthält. Die Temperaturabhängigkeit von Wärmeleitzahl und Zähigkeit wird berücksichtigt. — Den zweiten Teil der Arbeit bildet eine eindimensionale Theorie der Blendenströmung, bei der eine mittlere radiale Geschwindigkeit im Blendenquerschnitt eingeführt wird. Ausflußzahl und Strahlkontraktion werden im Anschluß an die bekannten Ausflußzahlen von Flüssigkeiten berechnet. Die Theorie steht in sehr guter Übereinstimmung mit den Versuchen von Bachmann, Zeuner, Hirn, Weisbach und Stanton.
E. Weinelt (Göttingen).

Jouguet, E.: Remarques sur un théorème d'Hugoniot relatif à l'écoulement des fluides. *C. R. Acad. Sci. Paris* 194, 141–146 (1932).

Jouguet, E.: Sur les diffuseurs refroidis. *C. r. Acad. Sci. Paris* 194, 213–217 (1932).

Die erste Note handelt von der Rolle der Schallgeschwindigkeit bei Strömungen in Lavaldüsen unter Berücksichtigung der Reibung und der Wärmeleitung in eindimensionalem Ansatz, d. h. es wird in einem Querschnitt mit der Entfernung l vom engsten Querschnitt der Düse eine einheitliche Geschwindigkeit v angenommen. In einem Diagramm v über l bestimmt man in bekannter Weise Linienstücke dv zu dl bei konstanter Durchflußmenge, die sich zu Integrallinien konstanter Durchflußmenge zusammensetzen (Prandtl, Lorenz). Die Neigung dv/dl ergibt dabei einen Ausdruck, dessen Nenner N bei $v = \Omega$ verschwindet ($\Omega^2 = dp/d\rho$ bei konstanter Entropie bestimmt die Laplacesche Schallgeschwindigkeit Ω , $A^2 = dp/d\rho$ bei konstanter Temperatur die Newtonsche Schallgeschwindigkeit A ; p ist der Druck, ρ die Dichte). Der Zähler Z von dv/dl verschwindet bei reibungsloser und wärmeleitungsfreier Strömung bei $l = 0$, also im engsten Querschnitt. Der Schnittpunkt der Linien $Z = 0$, $N = 0$ ist der „kritische“ Punkt der Strömung, an dem keine eindeutige Neigung der Integralkurven besteht. Berücksichtigt man die Reibung, so gilt für ideale Gase $N = 0$ immer noch auf der Linie $v = \Omega_{\text{krit}} = \text{konst.}$ Der kritische Punkt rückt dabei aber aus dem engsten Querschnitt heraus und kann in drei Arten auftreten: 1. als isolierter Punkt entsprechend den Maximalquerschnitten der reibungslosen Strömung; 2. als Knotenpunkt, man erhält zwei Integralkurven durch den kritischen Punkt, die beide fallen, die Linie $Z = 0$ fällt ebenfalls, aber mit der geringsten Neigung; 3. als Verzweigungspunkt wie im reibungslosen Fall, eine Integralkurve steigt und stellt den Betriebszustand der Lavaldüse dar, die zweite Integralkurve fällt und stellt den Betriebszustand als Überschalldiffusor dar (Umkehrung der Strömung in der Lavaldüse), die Linie $Z = 0$ steigt mit größerer Neigung als die steigende Integralkurve. — Die zweite Note behandelt Lavaldüsen und Überschalldiffusoren unter Vernachlässigung der Reibung, bei denen die Querschnittsveränderungen durch entsprechende Erwärmungen und Abkühlungen des Gases ersetzt werden. Beim zylindrischen Rohr ist dabei die Temperaturzunahme im Vergleich zur zugeführten Wärmemenge proportional $(A^2 - v^2)/(\Omega^2 - v^2)$. Jouguet glaubt, die guten Erfahrungen mit gekühlten Überschalldiffusoren einerseits auf die glattere Strömung im zylindrischen Rohr und andererseits auf die Ausbildung des kritischen Punktes in Form eines Knotenpunktes, der unter bestimmten Bedingungen auftritt, zurückführen zu können, denn beim Knotenpunkt vereinigen sich alle Integralkurven in der ausgezeichneten Integralkurve geringerer

Neigung im kritischen Punkt, so daß der Diffusor nicht nur für eine einzige Durchflußmenge eine stetige Lösung besitzt. *A. Busemann* (Dresden).

Kneser, H. O.: Zur Dispersionstheorie des Schalles. (*Phys. Inst., Univ. Marburg.*) *Ann. Physik*, V. F. 11, 761—776 (1931).

Bei genügend hochfrequenten Schallwellen in einem Gase wird die adiabatische Kompression zwar die Translationsenergie, aber nicht oder nur in geringerem Grade die innere, d. h. Rotationsschwingungsenergie der Moleküle beeinflussen. Verf. spricht daher von einer Frequenzabhängigkeit der spezifischen Wärme, und durch starke Schematisierung gelingt es ihm, diese sowie ihren Einfluß auf die Schallgeschwindigkeit zu berechnen. Er findet ein Übergangsgebiet von etwa drei Oktaven, innerhalb dessen die Schallgeschwindigkeit vom gewöhnlichen niederfrequenten Wert bis zum hochfrequenten „eiatomigen“ Wert ansteigt, womit eine Phasenverschiebung zwischen Druckwelle und Verdichtungswelle von höchstens etwa einem Grad einhergeht. Nach der Quantentheorie hängt die Austauschgeschwindigkeit der inneren Energie, und damit die Frequenz des Übergangsgebiets, von der Lebensdauer des inneren Zustandes der Moleküle ab. *F. Zernike* (Groningen).

Klassische Optik.

Schulz, H. R.: Das maximale Öffnungsverhältnis einfacher Linsen. *Z. Physik* 73, 538—540 (1931).

Da bei einer einfachen Linse die Randstrahlen an der zweiten Fläche möglicherweise Totalreflexion erleiden können, so ist die größtmögliche „Öffnung“ einer Linse nicht immer identisch mit dem größtmöglichen Durchmesser der Linse. Der Verf. zeigt, daß es unter Berücksichtigung der erwähnten Totalreflexion zwei Grenzwerte für die Öffnungsverhältnisse einfacher Linsen gibt, und daß diese Grenzwerte in der Nähe der Einheit liegen und im übrigen vom Brechungsindex n abhängig sind. Zur Charakterisierung der Linsen benutzt der Verfasser die Parameter

$$\tau = d/r_1; \quad \sigma = r_2/r_1,$$

also das Verhältnis der Linsendicke zum ersten Krümmungsradius und das Verhältnis der beiden Krümmungsradien. Als Grenzwerte dieser Parameter ergeben sich die Werte

$$\sigma_{\max} = n^2/(2 - n^2); \quad \tau_{\max} = 2(1 - \sqrt{n^2 - 1})/(2 - n^2)$$

und als maximales Öffnungsverhältnis

$$\Phi/f = 4(n - 1)[1 + (n - 1)\sqrt{n^2 - 1}]/n^3 [= 2r_1/f].$$

Die angegebenen Formeln setzen voraus, daß der Einfallswinkel i der Randstrahlen an der Vorderfläche gleich 90° ist (daher: $\Phi = 2r_1$). Ändert sich der Wert von σ , so ergibt sich ein Wachstum der Linsendicke. Dies bedingt, daß die Totalreflexion bereits für einen Einfallswinkel i kleiner als 90° eintritt. Der Verfasser leitet die Bestimmungsgleichung für den Minimalwert des Einfallswinkels i ab, für den Totalreflexion auftritt. Diesem Minimalwert entspricht der erwähnte zweite Grenzwert des Öffnungsverhältnisses. Weiter weist der Verf. darauf hin, daß das Minimum der Aberration für solche Linsen erreicht wird, deren Krümmungsverhältnis zwischen den Krümmungsverhältnissen liegt, die den genannten Grenzwerten der Öffnung entsprechen. *Picht* (Berlin).

Graff, Th.: Beitrag zur Lehre von den Spiegellinsen. *Z.-Ztg Opt. u. Mech.* 52, 443—445 (1931).

Als Spiegellinsen bezeichnet der Verf. Linsen oder auch Linsensysteme, deren letzte Fläche (etwa durch Versilberung) spiegelnd (gemacht) ist. Der Spiegelung gehen so also eine oder mehrere Brechungen voraus, und das gespiegelte Licht muß die gleichen brechenden Flächen noch einmal passieren. Befindet sich vor einer solchen Spiegellinse ein Beobachter mit einer Lichtquelle, so wird er im allgemeinen mehrere Spiegelbilder der Lichtquelle wahrnehmen. Neigt man die Spiegellinse, so wandern die verschiedenen Spiegelbilder im allgemeinen nach verschiedenen Richtungen von

der Verbindungslinie: Beobachter \rightarrow Spiegellinse fort. Bei passender Neigung wird es möglich sein, die Spiegelbilder für den Beobachter zum Verschwinden zu bringen. Der Verf. behandelt nun die Frage, in welchem mathematischen Zusammenhang das Fortwandern der Spiegelbilder mit der Neigung der Spiegellinse steht und welches der kleinste Wert der Neigung ist, die man einer einfachen dünnen Linse geben muß, um gleichzeitig den Vorder- und Hinterreflex zu vermeiden. Es zeigt sich, daß bei festgehaltenem Brechungsindex und Linsendurchmesser der zur Beseitigung der Reflexe an beiden Seiten einer einfachen dünnen Linse erforderliche Neigungswinkel wohl von der Durchbiegung der Linse und auch von der Entfernung der Lichtquelle abhängt, daß aber der kleinste hierfür brauchbare Neigungswinkel von den angegebenen Größen unabhängig ist und allein von der Brechkraft der Linse abhängt. Es ist

$$|\operatorname{tg} i| = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{d}{4} |D|,$$

wo i jener kleinste Neigungswinkel, n der Brechungsindex, D die Brechkraft der Linse und d deren Durchmesser ist. *Picht* (Berlin-Lankwitz).

Dunoyer, Louis: *Étude du flux lumineux réfléchi par le dièdre droit et par le trièdre trirectangle concaves.* Rev. d'opt. 10, 437–452 (1931).

Ein Winkelspiegel von 90° schickt senkrecht zur Kante einfallendes Licht in seiner ursprünglichen Richtung zurück, ein rechtwinkliger Tripelspiegel Licht von beliebiger Einfallrichtung, vorausgesetzt, daß der betrachtete Strahl alle Flächen der Vorrichtung in seinem Verlauf trifft. Um den Wirkungsgrad einer solchen Vorrichtung zu prüfen, projiziert Dunoyer sie auf eine Ebene, die zu einem zu untersuchenden Parallelstrahlenbündel senkrecht steht. Der Flächeninhalt der Projektion gibt ein Maß für die Öffnung des einfallenden Bündels. Denkt man sich auf die nämliche Ebene eine zur gegebenen, in bezug auf die Kante (Ecke) des Spiegels symmetrische Vorrichtung projiziert, so gibt der gemeinsame Teil beider Projektionen ein Maß für die Öffnung des austretenden Bündels, da die außerhalb der zweiten Projektion einfallenden Strahlen nur einen Teil der Spiegelflächen treffen und daher zur Seite fallen. D. sucht diese Regel auch in allgemeinerer Form für beliebige Spiegelzusammensetzungen auszusprechen. Er betrachtet nun zunächst einen Winkelspiegel mit beliebig begrenzten, aber kongruenten Spiegelflächen. Ist S der Inhalt einer solchen Fläche, so gibt die allgemeine Regel für das einfallende, zurückgeworfene (stets kantensenkrechte) Strahlenbündel und deren Verhältnis:

$$\Phi_i = S(\sin \alpha + \cos \alpha), \quad \Phi_r = 2S \sin \alpha, \quad \frac{\Phi_i}{\Phi_r} = \frac{2 \sin \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$$

wenn α der kleinere der beiden Winkel ist, die das Bündel mit beiden Spiegelflächen bildet. Alle drei Werte haben ihr Maximum für $\alpha = 45^\circ$, und zwar ist hier der Wirkungsgrad 1. — Beim Tripelspiegel nimmt D. nach einigen allgemeinen Betrachtungen an, daß die Spiegelflächen von kongruenten rechtwinkligen Dreiecken begrenzt seien. Die Länge der drei Kanten sei R , das untersuchte Bündel bilde mit den Kanten Winkel, deren Kosinus λ, μ, ν seien. Es sind vier Fälle zu unterscheiden, je nachdem $\lambda + \mu > \nu$, $\mu + \nu > \lambda$, $\nu + \lambda > \mu$ ist oder eine dieser Ungleichungen nicht gilt. Es wird der Gang der Rechnungen nur angedeutet und das Ergebnis mitgeteilt. Es ist unter allen Umständen:

$$\Phi_i = \frac{\lambda + \mu + \nu}{2} R^2;$$

für Erfüllung der drei Ungleichungen $\Phi_r = \frac{(\lambda + \mu + \nu)^2 - 2}{\lambda + \mu + \nu} R^2$, dagegen z. B. für $\lambda + \mu < \nu$: $\Phi_r = \frac{4\lambda\mu}{\lambda + \mu + \nu} R^2$. Für $\lambda + \mu = \nu$ geben beide Formeln denselben Wert. — D. stellt

die Abhängigkeit von λ, μ, ν zeichnerisch dar, indem er den Schnittpunkt des durch die Ecke der Vorrichtung gehenden Strahls mit der Ebene durch die Endpunkte der Kanten betrachtet, jeder Richtung eines Parallelstrahlenbündels entspricht ein Punkt, und zwar liegen alle in Frage kommenden Punkte innerhalb eines gleichseitigen Dreiecks. Den erwähnten vier Fällen entsprechen vier kongruente Dreiecke. Φ_i ist überall, aber auch Φ_r im inneren Teil nur vom Abstände vom Mittelpunkt abhängig; in der Tat ist allein der Winkel mit der dreizähligen Achse des Tripelspiegels $V = \arccos \frac{\lambda + \mu + \nu}{\sqrt{3}}$ maßgebend. Die Kurven für konstantes

Φ_r sind hier Kreise. Außerhalb ist keine Drehungssymmetrie vorhanden, die fraglichen Kurven sind vom 4. Grade, gehen aber auf den Grenzen des inneren Dreiecks in die Kreise über und haben dort auch dieselben Tangenten. — Die Richtung der dreizähligen Achse gibt das Maximum für Φ_i , Φ_r und den Wirkungsgrad Φ_r/Φ_i , doch ist dieser höchste Wirkungsgrad nur $\frac{2}{3}$. Volle Drehungssymmetrie besteht bis zu einem Winkel $V = 21,6^\circ$, dort ist Φ_r noch 0,707 des Höchst-

wertes. Außerhalb nimmt Φ , nach den Kantenrichtungen zu langsamer ab als auf der anderen Seite. — In allen Richtungen, die den Spiegelflächen parallel verlaufen, ergeben die Formeln $\Phi_r = 0$, tatsächlich wird aber dort Licht zu sehen sein, das nur an einer oder zwei Flächen zurückgeworfen ist. *Hans Boegehold (Jena).*

Scandone, Francesco: Sulla forma delle frange d'ombra extraassiali ottenute con un reticolo a tratti inclinati sul piano di simmetria del sistema ottico. Nuovo Cimento, N. s. 8, 310—319 (1931).

Die Arbeit ist eine Ausdehnung der Untersuchungen von Ronchi auf allgemeinere Kaustiken. Gegeben sei ein rechtshändiges Koordinatensystem, dessen z -Achse mit der Normalen einer beliebigen einfachsymmetrischen Wellenfläche übereinstimmt. Ein Kreuzgitter der Maschenbreite D sei gegen die Symmetrieebene um den Winkel α gedreht und in den Strahlengang gebracht. In einer festen Entfernung von der Gitterebene sei eine Auffangfläche angebracht, auf der Schattenfiguren (frangie d'ombra) entstehen. Scandone berechnet näherungsweise die Gleichung dieser Gitterstreifen für den Fall, daß die Gleichung der Wellenfläche bis zu den Gliedern 4. Ordnung gegeben ist. Insbesondere wird eingehend der Fall untersucht, daß die Wellenfläche torisch ist (die Glieder 3. und 4. Ordnung verschwinden, Verf. spricht in diesem Fall von reinem Astigmatismus), sowie der Fall, daß nur die Glieder 3. Ordnung ungleich Null sind (Verf. spricht von reiner Koma). *Herzberger (Jena).*

Scandone, Francesco: Sulla forma delle frange d'ombra dovute ad onde luminose affette da aberrazioni extrassiali. (*Stabilimento Koristka, Offic. Galileo, Milano.*) Nuovo Cimento, N. s. 8, 157—167 (1931).

Verf. untersucht die Gestalt der Schattenstreifen, die auf einem in festem Abstand befindlichen Schirm entstehen, wenn man ein Kreuzgitter der Maschenbreite D in den Zentralpunkt einer einfach symmetrischen Welle bringt. Es werden insbesondere die Erscheinungen untersucht, die entstehen, wenn die Glieder 3. Ordnung verschwinden, sowie der Fall, daß die Glieder 2. und 4. Ordnung verschwinden. *Herzberger.*

Scandone, Francesco: Sulla forma delle frange d'ombra ottenute coi reticoli circolari a frequenza costante. (*Stabilimento Koristka, Offic. Galileo, Milano.*) Nuovo Cimento, N. s. 8, 338—351 (1931).

Verf. führt die in vorstehenden Referaten beschriebenen Untersuchungen fort unter der Annahme, daß an Stelle eines Kreuzgitters ein strahlenförmiges Gitter konstanter Frequenz in den Strahlengang gebracht wird. *Herzberger (Jena).*

Thermodynamik und klassische kinetische Theorie der Materie.

Uller, Karl: Zur Theorie der Wärmeleitung und der Diffusion. (7. Dtsch. Phys.-Tag, Bad Elster, Sitzg. v. 13.—18. IX. 1931.) Physik. Z. 32, 892—897 (1931).

Aus wellenkinematischen Gründen glaubt der Verf. den Schluß ziehen zu müssen, daß die bisherige analytische Theorie der Wärmeleitung und der Diffusion unrichtig sein muß. Dieser liegt bekanntlich der Satz zugrunde, daß der Wärmefluß dem Gradienten eines „Wärmeflußpotentials“ proportional ist, als welches die Temperatur angenommen wird; analog wird angenommen, daß der Diffusionsstrom proportional dem „Diffusionspotential“ ist, das mit der Konzentration zusammenfallen soll. Es wird nun behauptet, daß das Wärmeflußpotential nicht die Temperatur, sondern eine Funktion derselben sein muß und ebenso das Diffusionspotential nicht die Konzentration, sondern eine Funktion hiervon. Die genaue Gestalt dieser Funktionen kann aus diesen Überlegungen nicht abgeleitet werden, jedoch bestimmte Eigenschaften derselben. *Reinhold Fürth (Prag).*

Leontowitsch, M.: Zur Kinetik der Schwankungen. (Phys. Inst., Univ. Moskau.) Z. Physik 72, 247—265 (1931).

Bisher hat man Dichteschwankungen in Gasen und Flüssigkeiten, Konzentrationschwankungen in Lösungen, nur nach ihren räumlichen Eigenschaften untersucht. Es gelingt Verf., auch den zeitlichen Verlauf statistisch zu erfassen. Dazu entwickelt er

die Schwankungen in eine Fourierreihe nach der Zeit sowie den Raumkoordinaten, d. h. betrachtet dieselben als Superposition von Wellen. Bei den Konzentrationschwankungen in kolloiden Lösungen, welche ausführlicher betrachtet werden, hat man es mit Diffusionswellen zu tun, bei den Dichteschwankungen in Flüssigkeiten mit durch innere Reibung gedämpften Schallwellen. Verf. beschränkt sich ausdrücklich auf Wellenlängen, groß gegen die freie Weglänge der Moleküle. Die Resultate werden angewandt auf die Feinstruktur des Rayleighschen Streulichtes. Für die optischen Betrachtungen wird auf seine Arbeit mit Mandelstam und Landsberg [Z. Physik **60**, 334, (1930)] verwiesen.

F. Zernike (Groningen).

Lear jr., G. A. van, and G. E. Uhlenbeck: The Brownian motion of strings and elastic rods. (*Dep. of Phys., Univ. of Michigan, Ann Arbor.*) Physic. Rev., II. s. **38**, 1583 bis 1598 (1931).

Die Arbeit behandelt die Brownsche Bewegung eines kontinuierlichen schwingungsfähigen Systems (Saite, Stab, auch unter Einfluß der Schwerkraft). Frühere Autoren geben nur mittlere Werte für Amplituden und Geschwindigkeiten, wie sie nach längerer Einwirkung von stoßenden Molekülen erreicht werden. Dagegen wird hier, ebenso wie für den einfachen Oszillator in einer Arbeit mit Ornstein [Physic. Rev. **36**, 823 (1930)], die Zeitabhängigkeit gefunden, wenn für $t = 0$ entweder alle mechanischen Anfangsbedingungen gegeben sind oder ein Teil derselben, etwa nur die Ausschreitung s an einer Stelle x . Dazu dient die Zerlegung in gedämpfte Eigenschwingungen, welche sich als statistisch unabhängig voneinander ergeben. Für die Mitte einer homogenen Seite wird das Ergebnis graphisch dargestellt: s_z^2 zeigt deutlich die Grundschiebung der Saite, sinkt aber, bei großem Anfangswert s_0^2 , nach einer Viertelschwingung nicht etwa auf Null, sondern auf den Äquipartitionswert s_{∞}^2 , um nach einer halben Schwingung zu einem scharfen Maximum zu steigen. In derselben Weise wird der schwingende Stab mit einem freien Ende behandelt, für welchen Messungen von Houdyk vorliegen für den Endwert. Für den zeitlichen Verlauf sind noch keine Messungen da.

Zernike (Groningen).

Métadier, Jacques: Sur l'équation générale du mouvement brownien. C. R. Acad. Sci. Paris **193**, 1173—1176 (1931).

Verf. benutzt ein Operationskalkül von Schrödinger, weiter ausgebildet von Destouches (C. R. **193**, 518; dies. Zbl. **3**, 92), zur symbolischen Lösung der Fokker-Planckschen Differentialgleichung der Brownschen Bewegung unter Einfluß einer zeitabhängigen äußeren Kraft.

Zernike (Groningen).

Richards, L. A.: Capillary conduction of liquids through porous mediums. Physics **1**, 318—333 (1931).

It is assumed that the volume of water crossing an element of surface in an unsaturated porous medium is equal to the product of $(-K \partial \Phi / \partial n)$ and $d\sigma$, the area of the element, Φ being the sum of two potentials φ and ψ . The first φ is the potential of the gravitational field and the second $\psi = \int dp/\rho$ where ρ is considered constant, is the capillary potential from which the gradient of the pressure due to surface tensions is derived. The moisture content θ is the number of cubic centimeters of water per gram of dry medium. The weight of dry medium per unit volume is denoted by ρ_s . It follows that $\text{div grad } (K \Phi) = \rho_s \partial \theta / \partial t$. If θ is a one valued continuous function of ψ the right hand member of this equation can be written $\rho_s A \partial \psi / \partial t$. The quantity A which is equal to $\partial \theta / \partial \psi$ will be called the capillary capacity of the medium. On choosing the axis of z vertically upward and writing $\varphi = gz$, the equation of flow can be written

$$\text{div grad } K\psi + g \frac{\partial K}{\partial z} = \rho_s A \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

If K and A can from the experimental data be expressed as functions of the capillary potential, this equation becomes a differential equation for the determination of ψ . The theory is applied to one dimensional steady states of flow for one of which K is

found from experimental data to be a linear function of ψ . There is some evidence of a hysteresis effect between the moisture content and the capillary potential. *March.*

Gururaja Doss, K. S.: A note on the significance of the chemical constant. (*Dep. of Chem., Centr. Coll., Bangalore.*) *Indian J. Phys.* 6 a. *Proc. Indian Assoc. Sci.* 15, 459 bis 461 (1931).

Gives a few remarks without proof on the dimensional considerations of Lindemann [*Phil. Mag.* 21, 38 (1920)] with the result that "the question of the dimensions of the chemical constant cannot be taken as definitely settled". *Zernike* (Groningen).

Jaumann, Johannes: Die Formen der Lichtwelle, welche eine schwarze Temperaturstrahlung repräsentiert. (*Phys. Inst., Univ. Breslau.*) *Z. Physik* 72, 700—714 (1931).

Verf. gibt bekannte Betrachtungen von Rayleigh, Schuster, Gouy wieder, nach welchen ein Spektralapparat, etwa Gitter, einfallendes weißes Licht nicht in Teile verschiedener Frequenz zerlegt, sondern dem Licht seine eigene räumliche Periodizität aufzwingt. „Der Spektralapparat führt eine Integration, keine Zerlegung durch.“ Darüber hinaus berechnet er aus dem Planckschen Gesetz zwei verschiedene Elementarimpulse, welche nach dem Fourierschen Integralsatz das Spektrum der schwarzen Strahlung ergeben. Eine an sich willkürliche Phasenfunktion wird dabei konstant genommen. Interferenzerscheinungen mit weißem Licht, ohne oder mit nachheriger spektraler Zerlegung, werden mit diesen Impulsen erklärt. Verf. spricht auch über die Möglichkeit, die Zahl der emittierten Impulse durch Schwankungen einer Photozelle nachzuweisen. Von Quanten ist dabei nicht die Rede. Selbst wenn die Impulse als elementare Emissionsvorgänge physikalische Bedeutung haben, so geht diese, wie er näher ausführt, durch die Vermischung des Lichtes vieler Zentren verloren.

F. Zernike (Groningen).

Quantentheorie.

Swann, W. F. G.: Reality in physics. (*Bartol. Res. Found., Franklin Inst., Philadelphia.*) *Science* (N. Y.) 1932, 113—121.

Reichenbächer, Ernst: Die Herkunft der trägen Masse. *Z. Physik* 72, 553—556 (1931).

Weiterführung einer früher begonnenen Untersuchungsreihe [*Z. Physik* 58, 402 (1929); 61, 490 (1930); 62, 412 (1930); 65, 564 (1930)] über eine allgemein kovariante Formulierung der zweikomponentigen Wellengleichung des Elektrons. Durch Mittelung über eine Strecke von der Länge h/mc kann die bisher in den Gleichungen nicht auftretende Masse des Teilchens eingeführt werden. Verf. knüpft an diesen Umstand eine Bemerkung über die statistische Gültigkeit der Naturgesetze. *G. Beck.*

Reichenbächer, Ernst: Die Weltfunktion in dem vereinigten Wirkungsintegral der Gravitation, Elektrizität und Materie. II. *Z. Physik* 72, 669—682 (1931).

Neue zusammenhängende Formulierung der im vorangehenden Referat zitierten Untersuchungen. Es wird versucht eine Weltfunktion aufzufinden, deren Variation die allgemein kovariante Form der zweikomponentigen Wellengleichung des Elektrons liefert und in der weiteren Durchführung auch die Herleitung der Feldgleichungen des elektromagnetischen und des Gravitationsfeldes gestatten soll. *G. Beck.*

Kirkwood, John G.: Polarisierbarkeiten, Suszeptibilitäten und van der Waalsche Kräfte der Atome mit mehreren Elektronen. (*Physikal. Inst., Univ. Leipzig.*) *Physik. Z.* 33, 57—60 (1932).

Um die Polarisierbarkeit von Atomen mit mehreren Elektronen zu berechnen, setzt man die Wellenfunktion jedes Elektrons ψ_j an als Produkt:

$$\psi_j = \psi_{0j} (1 + \lambda v_j),$$

worin ψ_{0j} die ungestörte Wellenfunktion, v_j das Störungspotential des Elektrons und λ einen noch unbestimmten Zahlenfaktor bedeuten. Als Störungspotential wird das Potential eines homogenen elektrischen Feldes angesetzt. Dann verschwindet bei dipolfreien Molekülen die Störungsenergie erster Ordnung; für die zweite Ordnung

ergibt sich ein Ausdruck, in den noch der Parameter λ eingeht. Er wird nach dem bekannten Minimumprinzip eliminiert. Dann ergibt sich die Polarisierbarkeit α_0 als Funktion der elektrischen Hauptträgheitsmomente Θ , der Anzahl Elektronen im Atom n , der Richtungskosinus des Feldes α, β, γ und des Wasserstoffradius a_0 zu

$$\alpha_0 = -\frac{4a_0^3}{n} [\alpha^2 \Theta_x + \beta^2 \Theta_y + \gamma^2 \Theta_z]^2.$$

Mittelung über alle Orientierungen und Spezialisierung für ein kugelsymmetrisches Atom ergibt:

$$\alpha_0 = \frac{4a_0^3}{9n} [\sum r^2]^2.$$

Unter Verwendung der Theorie von van Vleck ergibt sich ein einfacher Zusammenhang zwischen der Polarisierbarkeit und der diamagnetischen Suszeptibilität χ :

$$\chi = -\frac{e^2 L a_0^{1/2}}{4m c^2} \sqrt{n \alpha_0},$$

worin L die Anzahl Atome/g bedeutet. Diese Beziehung ist bei Edelgasen mit der Erfahrung in guter Übereinstimmung. Anwendung desselben Verfahrens auf die Wechselwirkung zweier Atome in großen Abständen ergibt einen Ausdruck für die van der Waalssche Anziehung, die nahezu mit einer früher unter Anwendung wasserstoffähnlicher Eigenfunktionen berechneten Formel übereinstimmt. *Eisenschütz.*

El-Sherbini, M. A.: Third-order terms in the theory of the Stark effect. *Philosophic. Mag.*, VII. s. 13, 24–28 (1932).

Berechnung des Starkeffekts dritter Ordnung bei einem wasserstoffähnlichen Atom mit Kernladung Z nach der Quantenmechanik. *R. de L. Kronig* (Groningen).

Sommerfeld, A.: Das Spektrum der Röntgenstrahlung als Beispiel für die Methodik der alten und neuen Mechanik. *Scientia* (Milano) 51, 41–50 (1932).

Bericht über die klassische, korrespondenzmäßige und wellenmechanische Theorie des kontinuierlichen Röntgenspektrums. *F. Hund* (Leipzig).

Magliano, Hilario, und Enrique Gaviola: Die Auslöschung der Resonanzstrahlung von Hg-Dampf und die Konzentration der metastabilen 2^3P_0 -Atome. (*Dep. de Mat. y Inst. de Fis., Univ., La Plata.*) *Contrib. Estud. Ci. fís. y mat.* 5, ser. mat. 477–498 u. engl. Zusammenfassung 478 (1931) [Spanisch].

Die Auslöschung der Resonanzbestrahlung von Hg wird auf Grund der Messungen von Stuart untersucht. Die Verff. leiten eine allgemeine „Auslöschungsformel“ für die Resonanzstrahlung von Hg ab aus einfachen Betrachtungen aller dabei möglichen Prozesse (Stöße, Molekelbildung, Absorption anderer Linien usw.). Die Formel steht in guter Übereinstimmung mit den Messungen von Foote, Klumb und Pringsheim und Gaviola. Der Stoßradius des angeregten Hg-Atoms ergibt sich als wahrscheinlich nicht größer als derjenige von H_2 . Frühere Untersuchungen der Auslöschung der Resonanzstrahlung werden ausführlich diskutiert. *Bechert* (München).

Rosen, N.: The normal state of the hydrogen molecule. (*Massachusetts Inst. of Technol., Cambridge, U.S.A.*) *Physic. Rev.*, II. s. 38, 2099–2114 (1931).

Mit einem Variationsverfahren werden Dissoziationsenergie und Schwingungsfrequenz des H_2 -Grundzustandes berechnet. In dem Eigenfunktionsansatz (a, b Kerne; 1, 2 Elektronen)

$$\psi = \psi(a1) \psi(b2) + \psi(b1) \psi(a2)$$

$$\psi(a1) = Ne^{-\alpha r_{a1}} (1 + \sigma r_{a1} \cos \vartheta_{a1}),$$

der die allseitige und die einseitige Deformation eines H-Atoms unter dem Einfluß des anderen wiedergeben soll, wird zuerst $\sigma = 0$ gesetzt und α variiert, dann α wie im H-Atom gesetzt und σ variiert, schließlich werden beide variiert. *F. Hund* (Leipzig).

Bruni, Giuseppe: La struttura delle molecole organiche e l'atomistica moderna. *Scientia* (Milano) 51, 51–70 (1932).

Bericht über Fortschritte in der Kenntnis der Struktur organischer Molekeln, insbesondere der Dipole, der Anordnung der Atome auf Grund von Röntgenstrahl- oder Elektronen-Interferenzen und der Kristallgitter organischer Stoffe. *F. Hund.*

Teller, E., und L. Tisza: Zur Deutung des ultraroten Spektrums mehratomiger Moleküle. (*Phys.-Chem. Inst., Univ. Göttingen u. Inst. f. Theoret. Phys., Univ. Budapest.*) *Z. Physik* **73**, 791—812 (1932).

Die Struktur der ultraroten Absorptionsbanden erlaubt es, Schlüsse über die Form der mehratomigen Moleküle zu ziehen. Für das Methan wurde man so zu der Annahme geführt, daß sich im Gleichgewichtszustand das *C*-Atom im Mittelpunkte eines regulären Tetraeders befindet, an dessen Eckpunkten die *H*-Atome liegen. Die Rotation eines solchen Moleküls müßte im wesentlichen die eines Kugelschreibers sein. Bei den Methylhalogeniden ist eines der *H*-Atome durch ein Halogenatom ersetzt. Das Molekül sollte dann wie ein symmetrischer Kreisel rotieren. Berechnet man nun die Trägheitsmomente dieser Moleküle in der Gleichgewichtskonfiguration aus dem Abstand aufeinanderfolgender Bandenlinien mittels der bekannten Ausdrücke für die Rotationsenergie, so ergeben sich ganz verschiedene Werte, je nachdem, welche der Absorptionsbanden man benutzt. Die Verff. zeigen, daß diese Diskrepanz durch die Anwesenheit entarteter Schwingungszustände verursacht wird. Die Schwingungsbewegung kann dann einen Drehimpuls haben. Hierdurch wird die Rotationsbewegung des Moleküls erheblich beeinflußt, und zwar etwa so, als ob in einen starren rotierenden Körper ein Schwungrad eingebaut wäre, daß nicht frei drehbar, sondern noch durch eine vom Drehwinkel gegenüber dem Molekül abhängige potentielle Energie an dasselbe gekoppelt ist. An Hand eines etwas schematisierten Modells wird gezeigt, daß der Abstand aufeinanderfolgender Linien in den *P*- oder *R*-Zweigen beim Methan nicht mehr $2B = h^2/4\pi^2 I$ ist, wo *I* das Trägheitsmoment bedeutet, sondern $2B(1 - \bar{M})$, wobei vorausgesetzt wird, daß nur einer der beiden Schwingungszustände, zwischen denen der Übergang stattfindet, entartet ist. \bar{M} ist der mittlere Drehimpuls der Kernschwingung in dem entarteten Zustand. Für die Methylhalogenide ist der Einfluß etwas komplizierter. Es wird endlich darauf hingewiesen, daß in Molekülen, welche *H*-Kerne enthalten, die Annahme harmonischer Kernschwingungen von der Wirklichkeit erheblich abweicht.

R. de L. Kronig (Groningen).

Laar, J. J. van: Betrachtungen über die Zustandsgleichung von Gasen und Flüssigkeiten, mit Rücksicht auf die Veränderlichkeit von *a* und *b* mit *T* und *v*. (A. Wasserstoff.) III. Die Ausdrücke für die kritischen Größen. *Proc. Roy. Acad. Amsterdam* **34**, 977—987 (1931).

Um eine allgemeingültige Zustandsgleichung aufzustellen, wird die van der Waals'sche Gleichung zugrunde gelegt, aber ihre Koeffizienten *a* und *b* als temperatur- und volumabhängig vorausgesetzt. Die Gleichung wird in folgender Form angewendet:

$$p = \frac{RT}{v - b} - \frac{a_v}{(v + \frac{1}{2}c)^2}$$

mit drei Parametern, von denen *c* volumunabhängig ist. Wenn *b* volumunabhängig und *c* = 0 ist, ergibt sich für den Quotienten *RT* und *bp* beim kritischen Punkt der Wert 8. Obwohl bei Wasserstoff die einfachen Beziehungen für die einzelnen Konstanten nicht gelten, scheint der angegebene Quotient denselben Zahlenwert, nämlich 8, anzunehmen. Die Diskussion des Erfahrungsmaterials läßt auch andere einfache Beziehungen zwischen den thermodynamischen Größen am kritischen Punkt erkennen. *Eisenschitz*.

Hund, F.: Zur Frage der chemischen Bindung. II. Zum Verständnis der organischen Chemie. *Z. Physik* **73**, 565—577 (1932).

Die in I. (*Z. Physik* **73**, 1; vgl. dies. Zbl. **3**, 141) angestellten Überlegungen werden erweitert. Dabei wird hauptsächlich wieder Gebrauch gemacht von dem Verfahren, das die Elektronenzustände in der Molekel unter Vernachlässigung des Elektronenaustausches durch Linearkombinationen der Eigenfunktionen der einzelnen Elektronen in den einzelnen Atomen annähert. Eine Lokalisierung chemischer Bindungen in mehratomigen Molekeln läßt sich erreichen, wenn in jedem Atom genügend Eigenfunktionen einzelner Elektronen vorhanden sind, die für die Bindung in Betracht kommen und genügend Elektronen für die Eigenfunktionen in der Molekel. Dies in Verbindung

mit den Ergebnissen von I. liefert noch nicht das System der organischen Chemie. Es ist notwendig, etwas über die relative Festigkeit der aus einem p (oder q) Zustand entstandenen σ - und π -Bindungen zu wissen, wenn die Partner p -Valenzen haben. Es wird die Annahme gemacht (die auf Grund qualitativer Überlegungen wahrscheinlich gemacht wird), daß die σ -Bindung fester als die π -Bindung ist. Dann tritt im genannten Falle eine π -Bindung nur auf, wenn sie eine σ -Bindung zur Doppelbindung ergänzt. Im allgemeinen wird von verschiedenen Atomanordnungen diejenige als wahrscheinlich angenommen, die die höchste räumliche Symmetrie hat. Fälle mit nicht lokalisierten Bindungen sind die aromatischen Verbindungen. *E. Hückel (Stuttgart).*

Hund, F.: Zur Theorie der schwerflüchtigen nichtleitenden Atomgitter. *Z. Physik* **74**, 1—17 (1932).

Geht man davon aus, daß ein Kristallgitter einen Isolator oder elektrischen Leiter darstellt, je nachdem, ob seine tiefste Energie in endlichem Abstand von den nächsthöheren liegt, oder mit diesen zusammen praktisch ein Kontinuum bildet, und ferner davon, daß bei den nichtpolaren Isolatoren die Bindungsfestigkeit durch die Möglichkeit absättigbarer Valenzen im Heitler-Londonschen Sinne gegeben ist, so erlaubt eine einfache Diskussion der Atomterme und ihres Aufspaltens und Verschiebens beim Zusammenrücken zu einem Kristall, die Möglichkeit für die verschiedenen Gittertypen festzulegen. — Die Verhältnisse werden zunächst ausführlicher an der linearen Atomkette untersucht und dann auf den dreidimensionalen Fall erweitert. Insbesondere wird gezeigt, daß der theoretisch am schwersten zu verstehende Fall der Isolatoren großer Bindungsfestigkeit (z. B. Diamant) nur dann möglich ist, wenn die Bedingung erfüllt ist: Zahl der Valenzelektronen pro Atom = Zahl der Nachbarn = Zahl der Eigenfunktionen pro Atom (Entartungsgrad). *F. Bloch (Leipzig).*

Brillouin, L.: Statistique et magnétisme des électrons libres. *C. R. Acad. Sci. Paris* **194**, 255—258 (1932).

Es wird gezeigt, wie sich die a priori-Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Magnetisierungszustandes des Elektronengases leicht mit Hilfe Lagrangescher Multiplikatoren berechnen läßt. Unter der Annahme, daß die Energie nur vom Termsystem s abhängt, werden ferner Ausdrücke für das wahrscheinlichste magnetische Moment abgeleitet, die eine formale Ähnlichkeit mit den früher von Pauli berechneten haben. *F. Bloch.*

Steiner, W.: Über den Dreierstoßprozeß. (*Phys.-Chem. Inst., Univ. Berlin.*) *Z. physik. Chem. B* **15**, 249—273 (1932).

Zur Vereinigung zweier Atome zu einem Molekül ist nach allgemeinen quantentheoretischen Überlegungen ein Dreierstoß notwendig. Messungen des Verf. über die Vereinigung von Wasserstoffatomen haben diese Forderung der Theorie bestätigt. Um die gemessenen Geschwindigkeitskonstanten zu diskutieren, geht Verf. von dem gaskinetischen Ansatz für Dreierstöße aus und führt für die Querschnitte der auftretenden Atom- und Molekülarten die aus der quantenmechanischen Theorie bekannten Werte ein; die ebendaher bekannten statistischen Gewichte des $^1\Sigma$ - und $^3\Sigma$ -Zustandes des Wasserstoffatoms ermöglichen eine Ausscheidung der unwirksamen Stöße. Die in die Stoßzahlformel eingehende mittlere Lebensdauer eines Paares stoßender H-Atome wird gleichfalls unter Anwendung der quantenmechanischen Wechselwirkungsenergie neu berechnet; im Wirkungsbereich der homöopolaren Valenzkraft bewegen sich die Atome mit viel größerer Relativgeschwindigkeit als der mittleren thermischen Geschwindigkeit; infolgedessen wird die Lebensdauer um etwa eine Zehnerpotenz kleiner, als man angenommen hatte. Die Rechnung ergibt schließlich den Wirkungsdurchmesser der Energieübertragung vom Paar stoßender Wasserstoffatome auf ein zugleich stoßendes Wasserstoffmolekül. Dieser Wert ist mindestens 3mal so groß wie der aus der inneren Reibung berechnete Durchmesser. Daraus folgt, daß man die Wechselwirkung dieser 3 Partikeln nicht in eine Bildung eines Atompaares und Energieabfuhr durch einen dritten Partner zerlegen darf, sondern die gleichzeitige Wechselwirkung der 3 Partikel quantenmechanisch gerechnet werden müßte. *Eisenschitz.*